UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Conjuntos g-fechados em espaços L-topológicos e conjuntos g*-fechados em espaços L-Alexandroff

Rodrigo de Lima

Curitiba - PR
2006

Conjuntos g-fechados em espaços L-topológicos
e
conjuntos g*-fechados em espaços L-Alexandroff

Rodrigo de Lima

Orientação:
Prof^a. Dr^a. Soraya Rosana Torres Kudri

e

co-orientação:
Prof^o. Tomas Keller Breuckmann

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau em Mestre em Matemática Aplicada. Curso de Pós-graduação em Matemática Aplicada. Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Curitiba - PR
2006

Dedicatória

Dedico este trabalho à todos os que buscam contemplar a verdade.

Agradecimentos

Agradeço :

- antes de tudo, à Deus, pois reconheço que sem Ele, eu nada poderia;
- aos sacerdotes Pe. Otavio C. Bortoluzzi; Pe. Ozenildo Staviski; Pe. Bernardo Willian Echeverry Cañas e Pe.Gilson Camargo;
- á todos os meus professores do curso de Mestrado, em especial a Soraya Rosana Torres Kudri, Tomas Keller Breuckmann e Marcelo Muniz Silva Alves;
- aos professores da Udesc - Joinville: Enori Carelli, Dario Noli, Rogério de Aguiar e de modo especial a Lauri Fernandes da Silva;
- aos meus professores do curso de graduação : Venâncio Ferreira e Maria Magdalena de Castro;
- aos meus pais Gabriel e Judith;
- á todos os que me ajudaram durante os momentos mais "nebulosos" dos últimos três anos.

Lista de símbolos

$\emptyset$	conjunto vazio
$\subseteq$	relação de inclusão entre conjuntos
$\leq$, $\nleq$	relação de ordem parcial e sua negação
χ_A	função característica do conjunto A
$\cap$, $\cup$	operações de intersecção e de união entre conjuntos respectivamente
$\wedge$, $\vee$	operações de infimo e supremo respectivamente
A^c	complementar de um conjunto A
$f : A \longrightarrow B$	função de A em B
L	Reticulado
L^X	conjunto de todos os conjuntos L-fuzzy de X
$\prime$	involução com reverção de ordem
$Pr(L)$	conjunto dos elementos primos de L
$Cp(L)$	conjunto dos elemntos coprimos de L
(X, τ)	espaço topológico
$(X, \Im)$	espaço L-topológico
(X, α)	espaço de Alexandroff
(X, β)	espaço L-Alexandroff

x_p	ponto L-fuzzy
$0, 1$	infimo e supremo de um reticulado respectivamente
$supp(f)$	suporte de um conjunto L-fuzzy
$\bigwedge\limits_{i \in J} f_i$	infimo das funções f_i, $i \in J$
$\bigvee\limits_{i \in J} f_i$	supremo das funções f_i, $i \in J$
A°	interior do conjunto A
$\overline{A}$	fecho do conjunto A
f°	interior do L-conjunto f
$\overline{f}$	fecho do L-conjunto f
Φ	família de todos os conjuntos fechados de um espaço topológico
$\bigcap\limits_{i \in J} A_i$	intersecção de todos os conjuntos A_i, $i \in J$
$\bigcap\limits_{i \in J} A_i$	união de todos os conjuntos A_i, $i \in J$
$\in, \notin$	relação de pertinência de elemento para conjunto e sua negação
$A - B$	diferença do conjunto A ao conjunto B
$\forall$	quantificador ´´para todo"
$\Longrightarrow$	relação de implicação
$\Longleftrightarrow$	relação de equivalência
$ker(A)$	intersecção de todos os conjuntos abertos contendo A
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\wp(X)$	coleção de todos os subconjuntos do conjunto X

Sumário

Resumo

Um dos objetivos deste foi sugerir uma definição de conjunto g-fechado para espaços L-topológicos e estudar algumas propriedades. Com a nossa definição, em L-topologias, encontramos vários resultados analogos aos encontrados na topologia geral. Nós também propomos uma versão L-fuzzy para espaços de Alexandroff que batizamos de L-Alexandroff. Para estes espaços, definimos conjuntos g*-fechados e encontramos vários resultados analógos aos obtidos em espaços de Alexandroff.

Palavras-chave: conjuntos g-fechados, conjuntos g*-fechados, espaços L-topológicos, espaços de Alexandroff.

Abstract

One of the goals of this work is to suggest a definition for g-closed sets in L-topological spaces and study some of its properties. We could obtain in L-topology similar results to those obtained in topological spaces. We also propose an L-fuzzy version for Alexandroff spaces which we call here L-Alexandroff spaces. On these spaces we define g*-closed sets and obtain similar results to those obtained in Alexandroff spaces.

Keywords: g-closed sets, g*-closed sets, L-topological spaces, L-Alexandroff spaces.

Capítulo 1

Introdução

Em 1965, um trabalho de Zadeh [30] causou grande interesse no mundo científico. Em [30], Zadeh definiu os primeiros conceitos do que, futuramente, seria chamada de matemática fuzzy.

Dado um conjunto universo qualquer X, sabemos que um subconjunto A de X pode ser representado por sua função carcterística $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ definida como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Sejam $A, B \subseteq X$. Observe que:

i. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$
ii. $\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B$
iii. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$
iv. Se $A \subseteq B$, então $\chi_A \leq \chi_B$
v. $\chi_\emptyset = 0$
vi. $\chi_X = 1$

onde:

$(\chi_A \wedge \chi_B)(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$,

$(\chi_A \vee \chi_B)(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$,

$0(x) = 0$ e $1(x) = 1$, para todo $x \in X$.

Assim as operações $\cap, \cup$ entre conjuntos podem ser representadas, nas funções características como $\wedge, \vee$ respectivamente, assim como a relação $\subseteq$ pode ser representada por $\leq$ nas funções características.

O que Zadeh fez foi criar uma função $\mu_A : X \to [0,1]$, baseada em χ_A. Observe que o contra domínio de μ_A é o intervalo $[0,1]$. A função μ_A é chamada de conjunto fuzzy.

Sejam $A, B \subseteq X$ e $\mu_A, \mu_B : X \to [0,1]$ conjutos fuzzy. Com base nas operações de união, intersecção, complementar e inclusão dos conjuntos clássicos, temos que:

i. a operação $\wedge$ é chamada de intersecção fuzzy;
ii. a operação $\vee$ é chamada de união fuzzy;
iii. a operação ^{c} é a operação que associa cada conjunto fuzzy μ_A a função ${\mu_A}^c = 1 - \mu_A$;
iv. a relação $\leq$ é chamada de inclusão fuzzy. Se $\mu_A \leq \mu_B$, diremos que μ_A está contido em μ_B;
v. o conjuto vazio fuzzy é dado pela função $0 : X \to [0,1]$ onde $x \mapsto 0$;
vi. o cojunto universo fuzzy é dado pela função $1 : X \to [0,1]$ onde $x \mapsto 1$.

Podemos observar que, ao contrário dos conjuntos clássicos, nem sempre teremos que:

$$\mu_A \wedge {\mu_A}^c = 0$$

Para verificarmos isto, basta tomarmos $\mu_A(x) = 0,5$.

Um pouco mais tarde, em 1967, Goguen [14], generalizou os conjuntos fuzzy.

Para Goguen, dado um conjunto X, os conjuntos fuzzy poderiam assumir qualquer valor num reticulado completo L.

Os elementos 0 e 1 serão, respectivamente, os elementos máximo e mínimo de L.

As funções $f : X \to L$ são chamadas de "conjuntos L-fuzzy"ou L-conjuntos. A família de todos os conjuntos L-fuzzy de X será representada por L^X.

As operações de intersecção e união em L^X nada mais são do que as operações $\wedge, \vee$(le-se supremo e infimo respectivamente). Assim, a união dos L conjuntos f e g é o L-conjunto $f \vee g$ onde $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ e a intesecção f e g é o L-conjunto $(f \wedge g)$ onde $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$. A relação de inclusão é dada por $\leq$. Diremos que $f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. A operação de complementar pode ser definida pela involução de ordem reversa $'$.

Seja $L = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ um reticulado completo. Dados $a, b \in L$, chamaremos de involução de ordem reversa a operação $' : L \to L$ no qual os elementos a' e b' satisfazem:

- $a \leq b$ se e somente se $b' \leq a'$
- $(a')' = a$

Sejam 0 e 1 os elementos mínimo e máximo de L respectivamente. Podemos observar que a involução de ordem reversa satisfaz,de maneira analoga, algumas propriedades do complementar de um conjuto clássico:

i. Se $f \leq g$, então $g' \leq f'$;
ii. $1' = 0$ e $0' = 1$;
iii. $(f \wedge g)' = f' \vee g'$
iv. $(f \vee g)' = f' \wedge g'$
v. $(f')' = f$

Onde os conjuntos L-fuzzy $0 : X \to L$ e $1 : X \to L$ são definidos como $0(x) = 0$ e $1(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Porém uma das mais importantes propriedades, que seria: $f \wedge f' = 0$, nem sempre é válida. Para verificarmos isto, basta sabermos que $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ com a relação de ordem usual é um reticulado completo e definirmos $f' = 1 - f$ e $f(x) = 0,5$, para todo $x \in X$.

Convém observar que um conjunto fuzzy é uma generalização da função característica e um L-conjunto é uma generalização de um conjunto fuzzy.

Falta ainda um conceito importante: temos noção de que um conjunto clássico poderia se comparar a uma reunião de objetos bem definidos. Assim, se os "L-conjuntos"são funções , o que poderia ser seus "elementos"?

Uma definição foi dada por Warner [25] e a usaremos em todo trabalho.

Dado um reticulado L, diremos que $p \in L$ é um elemento primo se e somente se $p \neq 1$ e ainda $a \wedge b \leq p$ implicar em $a \leq p$ ou $b \leq p$. O conjunto de todos os elementos primos de um reticulado completo L será denotado por $Pr(L)$.

Pela definição dada por Warner, dados $x \in X$ e $p \in Pr(L)$, um L-ponto é uma função $x_p : X \to L$, definida como:

$$x_p(y) = \begin{cases} p & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Note que x_p é também um L-conjunto.

Diremos que um L-ponto x_p pertence ao L-conjunto f,e escrevemos $x_p \in f$ se e somente se $f(x) \not\leq p$. Observe que se $f, g \in L^X$ são tais que $x_p \in f$ e $f \leq g$, então $x_p \in g$, pois, caso $x_p \notin g$, teriamos que $g(x) \leq p$ e assim, $f(x) \leq g(x) \leq p$, i. e., $x_p \notin f$, o que negaria a hipótese.

Se $x \in f$, $p \in Pr(L)$ e $f \in L^X$ são tais que $f(x) > p$, então $x_p \in f$, porém, como L nem sempre é um conjunto totalmente ordenado, a reciproca da afirmação acima pode ser falsa. Mas, caso L seja um conjunto totalmente ordenado a recíproca acima será verdadeira.

Outro detalhe importante a ser notado é que, ao contrário dos conjuntos clássicos, $x_p \in f$ não é condição necessária nem suficiente para afirmar que $x_p \notin f'$, uma vez que $f(x) \not\leq p$ pode não ser equivalente a $f'(x) \leq p$.

A primeira definição de espaço topológico fuzzy foi dada por Chang [7]. Chang definiu um espaço topológico fuzzy como sendo um conjunto clássico $\Im$ de conjuntos fuzzy, cujo reticulado é o intervalo real $[0, 1]$, em que:

i. $0, 1 \in \Im$;

ii. Se $f_i \in \Im, i \in J$ então $\bigvee_{i \in J} f_i \in \Im$;

iii. Se $f_i \in \Im, i = 1, ..., n$ então $\bigwedge_{i=1}^{n} f_i \in \Im$.

O espaços que chamaremos de Goguem tem uma definição análoga à de Chang, entretanto, ao invés de conjuntos fuzzy sobre o reticulado $[0, 1]$, os elementos de $\Im$ são conjuntos L-fuzzy, i. e., definidos sobre um reticulado L.

Atualmente, porém, chama-se de espaço topologico fuzzy o espaço proposto por Sostak cuja definição, dada abaixo, encontramos em [10]:

Dados um conjunto X e um reticulado L, chamaremos de topologia L-fuzzy uma função $\Im : L^X \to L$ onde:

i. $\Im(1) = \Im(0) = 1$;
ii. $\Im(u \wedge v) \geq \Im(u) \wedge \Im(v), \forall u, v \in L^X$;
iii. $\Im\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \geq \bigwedge_{j \in J} \Im(f_i), \forall i \in J, f_i \in L^X$.

O espaços de Goguem são conhecidos hoje como espaços L-topológicos.

Os conjuntos g-fechados foram introduzidos na topologia clássica por Levine em [17]. O objetivo de Levine foi generalizar os conjuntos fechados, para isso, definiu os conjuntos g-fechados como segue:

Seja $(X, \Im)$ um espaço topológico, diremos que $A \subseteq X$ é um conjunto g-fechado se e somente se para todo $U \in \Im$ onde $A \subseteq U$ temos que $\overline{A} \subseteq U$.

Com a definição acima, é evidente que todo conjunto fechado é g-fechado (uma vez que todo conjunto fechado é igual ao seu fecho), porém, nem todo g-fechado é fechado.

Levine [17] mostrou que muitos resultados clássicos para conjuntos fechados tem um resultado análogo para conjuntos g-fechados. Por exemplo, na topologia clássica temos que "Todo conjunto fechado em um espaço compacto é compacto". Levine prova que "Todo cojunto g-fecahdo em um espaço compacto é compacto". Ou seja, muitas propriedades dos conjuntos fechados são válidos para conjuntos g-fechados.

Em [6], B. Balasubramanian e P. Sundaram deram uma definição de conjuntos g-fechados fuzzy como segue: "um conjunto L-fuzzy μ é g-fechado no espaço L-topológico $(X, \Im)$ se e somente se para todo $a \in \Im$ temos que $\mu \leq a$ implica em $\overline{\mu} \leq a$", porém, com essa definição, não garantimos o resultado que nos diz que todo conjunto g-fechado em um L-espaço compacto é compacto, utilizando a definição de compacidade dada por Kudri [19].

Neste trabalho, provamos também, com a nossa definição, que alguns resultados para conjuntos L-fechados possuem um resultado análogo para conjuntos g-fechados em um L-espaço. Convém observar que alguns teoremas foram demonstrados com uma restrição, na maioria dos casos, essa restrição refere-se ao reticulado L.

Ainda em [17], Levine define conjuntos g-abertos: Um determinado conjunto é g-aberto se e somente se seu complementar é g-fechado. Com uma definição análoga em L-espaços, provamos vários teorema equivalentes de [17] para L-espaços utilizando a nossa definição.

Em 1940, A. D. Alexandroff em [1] ao estudar funções e medidas em espaços variados, definiu um espaço como sendo um para ordenado (X, δ) onde δ é uma coleção de subconjuntos de X onde $X, \emptyset \in \delta$ e a união finita e a interseção enumerável de elementos de δ pertencem a δ. O par ordenado (X, δ) assim definido é chamado de espaço de Alexandroff e os elementos de δ são chamados de conjuntos fechados de (X, δ). Podemos observar que todo espaço topológico é de Alexandroff.

Em [9], P. Das e M. A. Rashid definiram em um espaço de Alexandroff os conjuntos g*-fechados. O objetivo de Das e Rashid foi fornecer uma versão dos conjunto g-fechados para espaços de Alexandroff.

Neste trabalho, mostramos no capítulo 4 que as definições de conjuntos g-fechados e g*-fechados em um espaço topológico são equivalentes. Além disso, sugerimos a definição de um espaço de Alexandroff como base nos conjuntos L-fuzzy e também uma definição para conjuntos g*-fechados.

O primeiro capítulo é dedicado a apresentação dos conceitos básicos de reticulados, L-conjuntos, L-pontos e L-espaços.

No segundo capítulo, apresentaremos um estudo dos conjuntos g-fechados.

Já no capítulo terceiro, sugerimos uma definição de conjuntos g-fechados para espaços L-topológicos.

No quarto capítulo apresentamos a definição de espaços de Alexandroff e de conjuntos g*-fechados.

Por fim, no quinto capítulo sugerimos uma definição de espaços de Alexandroff para L-conjuntos (que chamaremos de espaços de L-Alexandroff) e conjuntos g*-

fechados para esses espaços.

Demonstramos de maneira própria alguns resultados de [17] e [9].

Em todo o trabalho, todos os resultados e definições sem atribuição de autoria são nossa contribuição.

Capítulo 2

L-topologias

O presente capítulo contêm algumas definições e resultados básicos que serão utilizados em todo trabalho.

Ele está dividido em três seções: a primeira apenas com algumas definições e observações sobre reticulados, já a segunda seção contém as definições sobre L-conjuntos e L-pontos e na terceira seção resultados e definições importantes em espaços L-topológicos, entre estes a definição de compacidade dada por Kudri [19]

2.1 Reticulados

Definição 2.1.1 *(Birkhoff, [3])*

Um reticulado $L = (L, \leq, \wedge, \vee)$ é um conjunto L munido de uma ordem parcial $\leq$, no qual todo subconjuto finito tem um ínfimo e um supremo, onde ínfimo e supremo são denotados respectivamente por $\wedge$ e $\vee$.

Observação 2.1.2

Se L é um conjunto totalmente ordenado, então L é um reticulado.

Definição 2.1.3 *(Birkhoff, [3])*

Um reticulado completo é um reticulado no qual todo subconjunto tem ínfimo e supremo. Vamos denotar o supremo de L por 1 e o infimo de L por 0.

Observamos que $0 = \vee\emptyset$ e $1 = \wedge\emptyset$

Definição 2.1.4 *(Gierz et al. [13])*

Um reticulado L é chamado de completamente distributibvo se e somente se é completo e atende a seguinte condição: $\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J_i} e_{i,j}\right) = \bigvee_{f\in K}\left(\bigwedge_{i\in I} e_{i,f(i)}\right)$, *onde para cada* $i \in I$ *e para cada* $j \in J_i$, $e_{i,j} \in L$ *e K é o conjunto de todas as funções* $f : I \to \cup J_i$ *tal que para todo* $i \in I$, $f(i) \in J_i$.

Definição 2.1.5 *(Birkhoff, [3])*

Uma involução com reversão de ordem em um reticulado L é uma função, $e \to e'$, *tal que:*

- $e \leq b \Longrightarrow b' \leq e'$
- $(e')' = e$

Definição 2.1.6 *(Hutton, [15])*

Um reticulado fuzzy é um reticulado completamente distributivo com uma involução com reversão de ordem.

Nota 2.1.7

Breuckmann em [5], mostra que a involução com reversão de ordem $' : L \to L$ *é uma bijeção e* $0' = 1$ *e* $1' = 0$.

A menos que se diga o contrário, a partir de agora L será um reticulado fuzzy.

Definição 2.1.8 *(Gierz et al., [13])*

Seja L um reticulado. Diremos que um elemento $p \in L$ *é primo se e somente se:*

1. $p \neq 1$;
2. *Se* $e, b \in L$ *são tais que* $e \wedge b \leq p$, *então* $e \leq p$ *ou* $b \leq p$.

O conjunto dos elementos primos de L será denotado por $Pr(L)$.

Definição 2.1.9 *(Gierz et al, [13])*

Seja L um reticulado. Diremos que um elemento $\alpha \in L$ é coprimo se e somente se quando:

1. $\alpha \neq 0$;

2. *Se $e, b \in L$ são tais que $\alpha \leq e \vee b$, então $\alpha \leq e$ ou $\alpha \leq b$.*

O conjunto dos elementos coprimos de L será denotado por $Cp(L)$.

Proposição 2.1.10 *(Blyth e Janowitz, [4])*

Seja $(L,')$ um reticulado completo com uma involução com reversão de ordem. Então para toda familia $\{e_i\}_{i\in J}$ de membros de L temos:

1. $\left(\bigvee_{i\in J} e_i\right)' = \bigwedge_{i\in J} e_i{}'$

2. $\left(\bigwedge_{i\in J} e_i\right)' = \bigvee_{i\in J} e_i{}'$

Seja $Pr(L)' = \{p' | p \in Pr(L)\}$. Temos que $Pr(L)' = Cp(L)$. De fato, seja $q \in Pr(L)'$ e $e, b \in L$ onde $q \leq e \vee b$. Assim deve existir $p \in Pr(L)$ onde $q = p'$. Com isso $p' \leq e \vee b$, logo $(e \vee b)' \leq p$, ou seja, $e' \wedge b' \leq p$. Como p é primo temos que $e' \leq p$ *ou* $b' \leq p$ e com isso: $p' \leq e$ *ou* $p' \leq b$, ou seja, $p' = q$ é primo. Seja agora $\alpha \in Cp(L)$, vamos mostrar que existe $p \in Pr(L)$ onde $\alpha = p'$. Sejam $e, b \in L$ de forma que $e \wedge b \leq \alpha'$, assim, $\alpha \leq (e \wedge b)'$, ou seja, $\alpha \leq e' \vee b'$. Como α é coprimo, por definição, temos que $\alpha \leq e'$ *ou* $\alpha \leq b'$, logo, $e \leq \alpha'$ *ou* $b \leq \alpha'$, ou seja, α' é primo, assim, deve existir $p \in Pr(L)$ onde $\alpha' = p$, i. e., $\alpha = p'$. Além disso $0 \notin Pr(L)'$, pois como para todo $p \in Pr(L)$, $p \neq 1$, temos que, para todo $p \in Pr(L)$, $p' \neq 0$.

2.2 L-conjuntos e L-pontos

Definição 2.2.1 *(Goguen,[14])*

Chamaremos de um L-conjunto sobre X uma função da forma $f : X \to L$*, onde X é um conjunto qualquer. O conjunto de todos os L-conjuntos sobre X será denotado por* L^X.

Observação 2.2.2

Convém notar que para um dado subconjunto $A \subseteq X$*, a função característica* $\chi_A : X \to L$ *definida por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \notin A \\ 1 \ se \ x \in A \end{cases}$$

é um L-conjunto de L^X.

Observação 2.2.3

Em L^X *podemos definir quaisquer operações que L possua e essas operações em* L^X *obedecerão todas as leis válidas em L. Assim, se L é um reticulado fuzzy então* L^X *também será.*

Observação 2.2.4

Em L^X*, vamos definir uma ordem parcial* $\leq$ *, operações de supremo* $(\vee)$ *e infimo* $(\wedge)$ *e uma involução de ordem* $(')$ *como seguem:*

1. Sejam $f, g \in L^X$. Denotamos $f \leq g$ se, e somente se, para todo $x \in X$ temos que $f(x) \leq g(x)$. Diremos assim que f está contido em g.
2. Seja $\{f_i\}_{i \in J}$ em L^X. Definimos $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)$ e $\left(\bigwedge_{i \in J} f_i\right)$ como sendo elementos de L^X onde

$$\left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)(x) = \underset{i\in J}{\vee} f_i(x) = \vee\{f_i(x) \mid i \in J\}$$
$$\left(\bigwedge_{i\in J} f_i\right)(x) = \underset{i\in J}{\wedge} f_i(x) = \wedge\{f_i(x) \mid i \in J\}$$

para todo $x \in X$.

As operações $\bigvee$ *e* $\bigwedge$ em L^X são chamadas respectivamente de união e intersecção.

3. Dado $f \in L^X$, definimos f' ao elemento de L^X onde para todo $x \in X$: $f'(x) = (f(x))'$.

Teorema 2.2.5

Seja $\{f_i\}_{i\in J}$ uma família de L^X. Então:

1. $\left(\bigvee_{i\in J} f\right)' = \bigwedge_{i\in J} f'$

2. $\left(\bigwedge_{i\in J} f\right)' = \bigvee_{i\in J} f'$

Prova

Seja $\{f_i\}_{i\in J}$ uma família de L^X e $x \in X$. Temos, pela proposição 2.1.10, que:

$$\left(\bigvee_{i\in J} f\right)'(x) = \left(\bigvee_{i\in J} f(x)\right)' = \bigwedge_{i\in J} (f(x))' = \bigwedge_{i\in J} f'(x)$$

Como $x \in X$ é qualquer, temos que $\left(\bigvee_{i\in J} f\right)' = \bigwedge_{i\in J} f'$.

De maneira analoga prova-se que $\left(\bigwedge_{i\in J} f\right)' = \bigvee_{i\in J} f'$

c.q.p.

Definição 2.2.6 *(Warner, [24])*

Seja $p \in Pr(L)$. Chamaremos de L-ponto ao elemento $x_p \in L^X$ definido como

$$x_p(y) = \begin{cases} 1 \ se \ y \neq x \\ p \ se \ y = x \end{cases}$$

Dado $f \in L^X$, diremos que x_p é um membro de f, e denotaremos por $x_p \in f$, se $f(x) \not\leq p$.

Observação 2.2.7

Os L-pontos são os elementos primos de L^X. Por isso, denotamos o conjunto dos L-pontos de L^X por $Pr(L^X)$.

Definição 2.2.8 *(Weiss, [28])*

Seja $f \in L^X$. Chamaremos de suporte de f ao conjunto supp(f) definido como:

$$supp(f) = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$$

2.3 L-topologias

Definição 2.3.1 *(Chang, [7])*

Chamaremos de uma L-topologia em X a uma coleção $\Im \subseteq L^X$ que satisfaz as seguintes condições:

1. *Os L-conjuntos $\emptyset$ e X definidos como $\emptyset(x) = 0$ e $X(x) = 1$ pertencem a $\Im$;*
2. *Dada uma familia $\{f_i\}_{i \in J}$ em $\Im$, temos que $\bigvee_{i \in J} f_i$ está em $\Im$;*
3. *Dados f e $g \in \Im$, temos que $f \wedge g \in \Im$.*

O par $(X, \Im)$ é chamado de espaço L-topológico.

Os elementos de $\Im$ são chamados de L-abertos de L^X. Diremos que um L-conjunto f é L-fechado se f' é L-aberto.

Definição 2.3.2 *(Pu e Liu, [21])*

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico e seja $f \in L^X$. O interior de f, f°, e o fecho de f, $\overline{f}$, são definitos como:

$$f^\circ = \vee\{g \in \Im; g \leq f\}$$

$$\overline{f} = \wedge\{g \in L^X; g \geq f \text{ e } g' \in \Im\}$$

Observação 2.3.3

Observamos que:

1. f° *é o maior L-aberto contido em* f *e* $\overline{f}$ *é o menor fechado contendo* f*;*

2. $\left(\overline{f}\right)' = (f')^\circ$ *e* $(f^\circ)' = \overline{(f')}$*;*

3. *(Azad, [2]) Para uma família* $\{f_i\}_{i\in J}$ *de L-conjuntos temos que:*

   i. $\left(\bigvee_{i\in J}\overline{f_i}\right) \leq \overline{\left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)}$*;*

   ii. $\left(\bigvee_{i\in J} f_i^\circ\right) \leq \left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)^\circ$*;*

   iii. Se J é finito, então $\left(\bigvee_{i\in J}\overline{f_i}\right) = \overline{\left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)}$

Definição 2.3.4 *(Warner e McLean, [26])*

Um espaço L-topológico $(X, \Im)$ *é chamado de compacto se para todo* $p \in Pr(L)$ *e para toda família* $\{f_i\}_{i\in J}$ *em* $\Im$ *onde* $\left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)(x) \nleq p$ *(ou seja:* $x_p \in \bigvee_{i\in J} f_i$*) para todo* $x \in X$*, existe* $F \subseteq J$*, F finito, onde* $\left(\bigvee_{i\in F} f_i\right)(x) \nleq p$ *(*$x_p \in \bigvee_{i\in F} f_i$*). para todo* $x \in X$*.*

Definição 2.3.5 *(Kudri, [18])*

Seja $(X, \Im)$ *um espaço L-topologico. Diremos que o L-conjunto* $g \in L^X$ *é compacto se para todo* $p \in Pr(L)$ *e para toda família* $\{f_i\}_{i\in J}$ *de conjuntos L-abertos onde* $\left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)(x) \nleq p$ *(*$x_p \in \bigvee_{i\in J} f_i$*) para todo* $x \in X$ *com* $g(x) \geq p'$ *(*$x_p \notin g'$*) existe* $F \in J$*, F finito, onde* $\left(\bigvee_{i\in F} f_i\right)(x) \nleq p$ *(*$x_p \in \bigvee_{i\in F} f_i$*),para todo* $x \in X$ *onde* $g(x) \geq p'$*.*

Em simbolos, a definição acima fica:

Para todo $p \in Pr(L)$ e para toda família $\{f_i\}_{i\in J}$ em $\Im$ onde:

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

implica que existe $F \subseteq J$, F finito, onde:

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i\in F} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Ou ainda, podemos reescrever como:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin g' \Longrightarrow x_p \in \left(\bigvee_{i\in J} f_i\right))$$

implica que existe $F \subseteq J$, F finito, onde:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin g' \Longrightarrow x_p \in \left(\bigvee_{i\in F} f_i\right))$$

Proposição 2.3.6 *(Kudri, [19])*

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico. Se g é um L-conjunto compacto, então para cada conjunto L-fechado h, $g \wedge h$ é compacto.

Prova

Seja g um L-conjunto compacto e seja h um L-fechado.

Seja $p \in Pr(L)$ e $\{f_i\}_{i\in J}$ uma família de L^X onde:

$$(\forall x \in X))(x_p \in (g \wedge h)' \Longrightarrow x_p \in \left(\bigvee_{i\in J} f_i\right))$$

i. e., seja $p \in Pr(L)$ onde

$$(\forall x \in X)((g \wedge h)(x) \geq p\prime \Longrightarrow \left(\bigvee_{i\in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Seja $\mathcal{B} = \{f_i\}_{i\in J} \cup \{h'\}$. Assim temos que:

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p\prime \Longrightarrow \left(\bigvee_{k\in \mathcal{B}} k\right)(x) \nleq p)$$

De fato, seja $x \in X$ tal que $g(x) \geq p'$ ($x_p \notin g'$). Se $h(x) \geq p'$ ($x_p \notin h'$), então $(g \wedge h)(x) \geq p'$ ($x_p \notin (g \wedge h)$)e assim $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \nleq p$ ($x_p \in \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)$), logo, $\left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)(x) \nleq p$ ($x_p \in \left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)$). Caso $h(x) \ngeq p'$, temos que $h'(x) \nleq p$, i. e.: $x_p \in h'$ e assim $\left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)(x) \nleq p$ ($x_p \in \left(\bigvee_{k \in \mathcal{B}} k\right)$). Como g é, por hipotese, compacto, temos que existe um $F \in K$, onde $F = \{f_1, f_2, f_3, ..., f_n, h'\}$ e :

$$(\forall x \in X)(g(x) \geq p\prime \Longrightarrow \left(\bigvee_{k \in F} k\right)(x) \nleq p)$$

ou

$$(\forall x \in X)(x_p \notin g' \Longrightarrow x_p \in \left(\bigvee_{k \in F} k\right))$$

Com isso, temos que:

$$(\forall x \in X)((g \wedge h)(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in \{1,...,m\}} f_i\right)(x) \nleq p)$$

i. e.:

$$(\forall x \in X)(x_p \notin (g \wedge h)' \Longrightarrow x_p \in \left(\bigvee_{i \in \{1,...,m\}} f_i\right))$$

De fato, pois, dado $x \in X$, de forma que $(g \wedge h)(x) \geq p'$, temos que $g(x) \geq p'$. Logo, como vimos acima, $\left(\bigvee_{k \in F} k\right)(x) \nleq p$. Com isso, deve existir $k \in F$ onde $k(x) \nleq p$, pois, se para todo $k \in F$ tivessemos que $k(x) \leq p$, o elemento primo p seria uma cota superior do conjunto $F(x) = \{f_1(x); f_2(x); ...; f_n(x), h'(x)\}$ e dessa forma $\left(\bigvee_{k \in F} k\right)(x) \leq p$. Por $(g \wedge h)(x) \geq p'$, temos ainda que $h(x) \geq p'$, ou seja, $h'(x) \geq p$, logo, $k \neq h'$, então $\left(\bigvee_{i \in \{1,...,m\}} f_i\right)(x) \nleq p$ para todo $x \in X$ onde $(h \wedge g)(x) \geq p'$. Como a família inicial $\{f_i\}_{i \in J}$ em $\Im$ e $p \in Pr(L)$ são quaisquer, temos que $h \wedge g$ é compacto.

c.q.p.

Corolário 2.3.7 *(Kudri, [19])*

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico. Se g é um L-conjunto compacto, então cada L-fechado contido em g é compacto também.

Proposição 2.3.8

Se $(X, \Im)$ *é um espaço L-topologico compacto, então o L-conjunto* X*, definido como* $X(x) = 1$ *para todo* $x \in X$*, é compacto.*

Prova

Seja $p \in Pr(L)$ e $\{f_i\}_{i \in J}$ em $\Im$ de forma que:

$$(\forall x \in X)(X(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Como para todo $x \in X, X(x) = 1 \geq p'$, temos que a afirmação acima resume-se em:

$$(\forall x \in X)(\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Por $(X, \Im)$ ser compacto, temos que existe $F \subseteq J$, F finito, onde:

$$(\forall x \in X)(\left(\bigvee_{i \in F} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Que pode ser reescrito como:

$$(\forall x \in X)(X(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in F} f_i\right)(x) \nleq p)$$

ou seja, $X \in L^X$ é compacto.

c.q.p.

Corolário 2.3.9 *(Kudri [19])*

Todo L-conjunto L-fechado em um espaço L-topologico compacto é compacto.

É fácil verificar isso, uma vez que,pela proposição anterior, o L-conjunto X é compacto se o espaço for compacto. E assim, pelo corolário 2.3.7, se $f = f \wedge X$ é L-fechado, então é compacto.

Definição 2.3.10 *(Warner e McLean, [26])*

Um espaço L-topológico $(X, \Im)$ *é chamado de Hausdorff se e somente se para todo* $p, q \in Pr(L)$ *e para todo par* $x, y \in X$ *sendo* $x \neq y$, *existem* $f, g \in \Im$ *onde* $f(x) \nleq p$ $(x_p \in f)$, $g(y) \nleq q$ $(y_q \in g)$ *e* $(\forall z \in X)\,(f(z) = 0$ *ou* $g(z) = 0)$.

Definição 2.3.11 *(Kudri, [19])*

Um espaço L-topológico é regular se e somente se para todo $p \in Pr(L)$, *para cada* $x \in X$ *e cada L-fechado* f *tal que existe* $y \in Y$ *com* $y_p \notin f'$ *(ou seja,* $f(y) \geq p'$*) e* $f(x) = 0$, *existem* $u, v \in \Im$ *com* $x_p \in u$ *(ou seja,* $u(x) \nleq p$*),*$y_p \in v$ *para todo* $y_p \notin f'$ *e* $(\forall z \in X)(u(z) = 0$ *ou* $v(z) = 0)$.

Definição 2.3.12 *(Kudri, [19])*

Um espaço L-topológico $(X, \Im)$ *é normal se e somente se para todo* $p \in Pr(L)$ *a para todo par* f, g *de L-fechados tais que existem* $x, y \in X$ *com* $x_p \notin f'$ $(f(x) \geq p')$ *e* $y_p \notin g'$ $(g(y) \geq p')$ *e* $(\forall z \in X)(f(z) = 0$ *ou* $g(z) = 0)$, *existem* $u, v \in \Im$ *no qual para todo* $z_p \notin f'$, $z_p \in v$ $(v(z) \nleq p)$*; para todo* $z_p \notin g'$, $z_p \in u$ *e* $(\forall z \in X)(u(z) = 0$ *ou* $v(z) = 0)$.

Observação 2.3.13

A definição acima pode ser reescrita como segue:

Um espaço L-topológico $(X, \Im)$ *é normal se e somente se para todo* $p \in Pr(L)$ *a para todo par* f, g *de L-fechados tais que existem* $x, y \in X$ *com* $x_p \notin f'$ $(f(x) \geq p')$ *e* $y_p \notin g'$ $(g(y) \geq p')$ *e* $(\forall z \in X)(f(z) = 0$ *ou* $g(z) = 0)$, *existem* $u, v \in \Im$ *no qual:*

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p);\ (\forall x \in X)(g(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \nleq p)$$

e ainda

$$(\forall z \in X)(u(z) = 0 \text{ ou } v(z) = 0)$$

ou

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in u);\ (\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in g' \Longrightarrow x_p \in v)$$

e ainda

$$(\forall z \in X)(u(z) = 0 \ ou \ v(z) = 0)$$

Capítulo 3

Conjuntos g-fechados

Neste capítulo apresentamos a definição de conjuntos g-fechados que motivou parte desta dissertação.

O capítulo está dividido em três seções. A primeira seção é dedicada ao conjuntos g-fechados onde Levine mostra que esses conjuntos possuem propriedades semelhantes ao dos conjuntos fechados e que todo conjunto fechado é g-fechado, ou seja, os conjuntos g-fechados são uma generalização dos conjuntos fechados. Na segunda seção temos a definição de conjunto g-aberto e algumas propriedades. Por fim, na terceira seção um dos pontos principais do artigo [17]: a definição de um novo axioma de separação denominado de $T_{1/2}$.

3.1 Conjuntos g-fechados

Definição 3.1.1 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto A de X é g-fechado se e somente se $\overline{A} \subseteq U$ quando $A \subseteq U$ e U é aberto.

Ou seja, um conjunto A é g-fechado se e somente se para todo $U \in \tau$, se $A \subseteq U$, então $\overline{A} \subseteq U$.

Teorema 3.1.2 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Um subconjunto* A *de* X *é g-fechado se e somente se* $\overline{A} - A$ *não contém nenhum conjunto fechado diferente do conjunto vazio.*

Prova

Necessidade: Seja F um conjunto fechado do espaço (X, τ) de forma que $F \subseteq \overline{A} - A$. Assim, $F \subseteq A^c$, com isso $A \subseteq F^c$. Como A é g-fechado, temos que $\overline{A} \subseteq F^c$, ou seja, $F \subseteq \left(\overline{A}\right)^c$. Desta forma, $F \subseteq \overline{A} \cap \left(\overline{A}\right)^c = \emptyset$ e assim F é vazio.

Suficiência: Digamos que o único conjunto fechado contido em $\overline{A} - A$ é o conjunto vazio. Seja $U \in \tau$ de forma que $A \subseteq U$, logo, $U^c \subseteq A^c$. Com isso, $\overline{A} \cap U^c \subseteq \overline{A} - A$. Como, por hipotese, o único fechado contido em $\overline{A} - A$ é o conjunto vazio, temos que $\overline{A} \cap U^c = \emptyset$, então $\overline{A} \subseteq U^c$.

c.q.p.

Corolário 3.1.3 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Um conjunto g-fechado* A *de* (X, τ) *é fechado se e somente se* $\overline{A} - A$ *é fechado.*

Prova

Necessidade: Se A é fechado,então $\overline{A} = A$, e assim $\overline{A} - A = \emptyset$ *Suficiência*: Digamos que $\overline{A} - A$ seja fechado. Como A é g-fechado e $\overline{A} - A$ é um subconjuto de si mesmo, temos, pelo teorema anterior, que $\overline{A} - A = \emptyset$, e assim $\overline{A} = A$, i. e., A é fechado.

c.q.p.

Teorema 3.1.4 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Se* A *e* B *são conjuntos g-fechados, então* $A \cup B$ *também é g-fechado.*

Prova

Seja $U \in \tau$ de forma que $A \cup B \subseteq U$. Assim, $A \subseteq U$ e $B \subseteq U$, logo, $\overline{A} \subseteq U$ e $\overline{B} \subseteq U$, com isso $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq U$, i. e.$\overline{A \cup B} \subseteq U$.

c.q.p.

Exemplo 3.1.5

A intersecção de dois conjuntos g-fechados nem sempre é um g-fechado. De fato, seja,por exemplo, $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, c\}$. Assim, tanto A com B são g-fechados, mas, $A \cap B = \{a\}$ não .

Teorema 3.1.6 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se A, B são tais que $B \subseteq A \subseteq X$, de forma que B é g-fechado relativo ao subespaço A e A é g-fechado relativo X, então B é g-fechado relativo a X.

Prova

Seja U um aberto de X, de forma que $B \subseteq U$. Assim $B \cap A \subseteq U \cap A$, ou seja, $B \subseteq U \cap A$. Logo, por hipotese, $\overline{B}_A \subseteq U \cap A$, onde $\overline{B}_A$ é o fecho de B em relação à A . Com isso, $A \cap \overline{B} \subseteq A \cap U$, de onde concluímos que $A \subseteq U \cup \left(\overline{B}\right)^c$. Sendo que A é g-fechado em X, temos que $\overline{A} \subseteq U \cup \left(\overline{B}\right)^c$. Logo, $\overline{B} \subseteq \overline{A} \subseteq U \cup \left(\overline{B}\right)^c$, com isso, $\overline{B} \subseteq U$.

c.q.p.

Corolário 3.1.7 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja A um conjunto g-fechado e suponha que F é um conjunto fechado. Então $A \cap F$ é um conjunto g-fechado.

Prova

Basta verificarmos que $A \cap F$ é fechado no subespaço A e assim g-fechado nesse. Aplicando agora o teorema anterior, temos que, $A \cap F$ é g-fechado.

c.q.p.

Teorema 3.1.8 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $A \subseteq X$ é g-fechado e $B \subseteq X$ é tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é g-fechado.

Prova

Seja $B \subseteq U$, onde $U \in \tau$. Assim, $A \subseteq U$, logo, $\overline{A} \subseteq U$. Como $\overline{A}$ é fechado e $B \subseteq \overline{A}$, temos que $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, e assim, $\overline{B} \subseteq U$.

c.q.p.

Teorema 3.1.9 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $A \subseteq Y \subseteq X$ e suponha que A é g-fechado em X. Então A é g-fechado relativo a Y.

Prova

Seja $U \in \tau$ de forma que $A \subseteq Y \cap U$. Assim, $A \subseteq U$. Como A é g-fechado, temos que, $\overline{A} \subseteq U$. Logo $Y \cap \overline{A} \subseteq Y \cap U$, i. e. $\overline{B}_Y \subseteq Y \cap U$ onde $\overline{B}_Y$ é o fecho de B relativo a Y.

c.q.p.

Teorema 3.1.10 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico e Φ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, τ). Dessa maneira $\tau = \Phi$ se, e somente se todo subconjunto de X é g-fechado.

Prova

Necessidade: Digamos que $\tau = \Phi$. Assim, todo conjunto aberto é fechado e vice-versa. Seja A um conjunto de X e $U \in \tau$ de forma que $A \subseteq U$. Assim $\overline{A} \subseteq \overline{U} = U$.

Suficiência: Vamos verificar que se $\tau \subseteq \Phi$, entao $\tau = \Phi$. De fato, digamos que todo conjunto aberto é também fechado. Seja $F \in \Phi$, então, F^c é aberto, logo, fechado. Assim, $(F^c)^c = F$ é aberto e com isso mostramos que $\tau = F$.

Seja $U \in \tau$. Queremos mostrar que $U \in \Phi$. Como $U \subseteq U$ e esse, por hipotese, é g-fechado, temos que $\overline{U} \subseteq U$. Logo $U = \overline{U}$, ou seja, U é fechado.

c.q.p.

Teorema 3.1.11 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico compacto e $A \subseteq X$ um conjunto g-fechado. Então A é compacto em (X, τ).

Prova

Seja $\{U_i\}_{i \in J}$ uma cobertura aberta de A em (X, τ). Logo, como $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} U_i$, temos que $\overline{A} \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} U_i$. Como $\overline{A}$ é compacto, temos que existe $F \subseteq A$, F finito, onde $A \subseteq \overline{A} \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} U_i$, ou seja, A é compacto.

c.q.p.

Teorema 3.1.12 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço de Lindelof (ou paracompacto ou enumeravelmente compacto) e suponha que A é um subconjunto g-fechado de X. Então A é Lindelof (ou paracompacto ou enumeravelmente compacto).

A prova desse teorema é analoga a prova do teorema anterior.

Teorema 3.1.13 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço normal e suponha que Y é um subconjunto g-fechado em X. Então o subespaço (Y, τ_Y) é normal.

Prova

Sejam E *e* F conjunto fechados de X de forma que $(E \cap Y) \cap (F \cap Y) = \emptyset$. Assim $Y \cap (E \cap F) = \emptyset$, e com isso, $Y \subseteq (E \cap F)^c$. Como $(E \cap F)^c$ é aberto, temos que $\overline{Y} \subseteq (E \cap F)$. Com isso, $(E \cap \overline{Y}) \cap (F \cap \overline{Y}) = \emptyset$. Como (X, τ) é normal, existem $U, V \in \tau$, U *e* V disjuntos, onde $(E \cap \overline{Y}) \subseteq U$ *e* $(F \cap \overline{Y}) \subseteq V$. Sabendo-se que $Y \subseteq \overline{Y}$, obtemos $(E \cap Y) \subseteq (U \cap Y)$ *e* $(F \cap Y) \subseteq (V \cap Y)$.

c.q.p.

Teorema 3.1.14 *(Levine, [17])*

Se (X, τ) é um espaço topológico regular e se A é compacto em (X, τ), então A é g-fechado.

Prova

Digamos que $A \subseteq X$ é compacto e $U \in \tau$ é tal que $A \subseteq U$. Assim, temos que existe $V \in \tau$ onde $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Logo, $\overline{A} \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

c.q.p.

Teorema 3.1.15 *(Levine, [17])*

Se (X, τ) é um espaço topológico regular e localmente compacto e se A é um g-fechado, então A é localmente compacto na topologia relativa.(o subespaço (A, τ_A) é localmente compacto).

Prova

Seja $x \in A$, logo, existe $x \in N \subseteq X$, onde N é uma vizinhança compacta de x. Como (X, τ) é regular, existe $U \in \tau$ onde $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq N$. Assim, $A \cap \overline{U}$ é uma vizinhança de A e, pelo corolário 3.1.7, é g-fechado em X. Pelo teorema 3.1.9, é g-fechado em N e assim, compacto, pelo teorema 3.1.11.

c.q.p.

Teorema 3.1.16 *(Levine, [17])*

Se (X, τ) *é um espaço topológico normal e* $F \cap A = \emptyset$ *onde* F *é fechado e* A *é g-fechado em* X*, então existem* $U, V \in \tau$*,* U *e* V *disjuntos onde* $F \subseteq U$ *e* $A \subseteq V$*.*

Prova

Dados F e A como acima, temos que, $A \subseteq F^c$. Sendo F fechado temos que F^c é aberto, assim, como A é g-fechado temos $\overline{A} \subseteq F^c$. Então $\overline{A} \cap F = \emptyset$. Logo, existem $U, V \in \tau$ disjuntos onde $A \subseteq \overline{A} \subseteq U$ e $F \subseteq V$.

c.q.p.

Exemplo 3.1.17

De maneira geral, conjuntos g-fechados disjuntos em um espaço normal, não podem ser separados por conjuntos abertos disjuntos. Seja, por exemplo, $X = \{a, b, c\}$ *e* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$*. Dessa maneira,* $\{b\}$ *e* $\{c\}$ *são g-fechados disjuntos, mas não podem serem separados por abertos disjuntos de* (X, τ)*.*

3.2 Conjuntos g-abertos

Definição 3.2.1 *(Levine, [17])*

Diremos que um subconjunto A *do espaço topológico* (X, τ) *é g-aberto se e somente se* A^c *é g-fechado.*

Teorema 3.2.2 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) *um espaço topológico e* Φ *a coleção de todos os fechados de* (X, τ)*. Um conjunto* A *é g-aberto se e somente se* $F \subseteq A^\circ$ *quando* $F \in \Phi$ *e* $F \subseteq A$*.*

Prova

Necessidade: Seja A é g-aberto e $F \in \Phi$ de forma que $F \subseteq A$. Dessa maneira, $A^c \subseteq F^c$. Como, por definição, A^c é g-fechado, temos que $\overline{(A^c)} \subseteq F^c$. Com isso, $F \subseteq \left(\overline{(A^c)}\right)^c$, ou seja, $F \subseteq A^\circ$.

Suficiência: Digamos que $A \subseteq X$ é tal que se $F \in \Phi$ e $F \subseteq A$ então $F \subseteq A^\circ$. Seja $U \in \tau$ de forma que $A^c \subseteq U$. Assim, temos que $U^c \subseteq A$, e por hipotese, $U^c \subseteq A^\circ$, com isso $(A^\circ)^c \subseteq U$, ou seja, $\overline{A} \subseteq U$.

c.q.p.

Definição 3.2.3 *(Gaal, [11])*

Diremos que $A, B \subseteq X$ são separados no espaço topologico (X, τ) se $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Observação 3.2.4

Pela definição acima, dois conjuntos $A, B \subseteq X$ são separados se e somente se $\overline{A} \subseteq B^c$ e $\overline{B} \subseteq A^c$, ou seja, para todo $x \in \overline{A}$ implica que $x \notin B$ e para todo $y \notin \overline{B}$ implica que $x \notin A$.

Teorema 3.2.5 *(Levine, [17])*

Se A e B são conjuntos g-abertos separados num espaço topológico (X, τ), então $A \cup B$ é g-aberto.

Prova

Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado em (X, τ) de forma que $F \subseteq A \cup B$. Assim $F \cap \overline{A} \subseteq B$. Com isso, $F \cap \overline{A} \subseteq B^\circ$. De maneira analoga podemos concluir que $F \cap \overline{B} \subseteq A^\circ$. Assim:

$F = F \cap (A \cup B) = F \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (F \cap \overline{A}) \cup (F \cap \overline{B}) \subseteq A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$.
Logo, pelo teorema 3.2.2, $A \cup B$ é g-aberto.

c.q.p.

Pelo exemplo 3.1.5, vemos que nem sempre a união de dois g-abertos é g-aberto.

Corolário 3.2.6 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico e A e B dois conjuntos g-fechados em (X, τ) de forma que A^c e B^c são separados. Então $A \cap B$ é g-fechado.

A prova segue imediatamente do teorema anterior, observando que $(A \cap B)^c$ é g-aberto.

Teorema 3.2.7 *(Levine, [17])*

Um conjunto A é g-aberto no espaço topológico (X, τ) se e somente se o único conjunto aberto que contém $A^\circ \cup A^c$ é X, ou seja, se $U \in \tau$ é tal que $A^\circ \cup A^c \subseteq U$, então $U = X$.

Prova

Necessidade: Seja A um g-fechado de X e seja $U \in \tau$ de forma que $A^\circ \cup A^c \subseteq U$. Dessa forma, $A^c \subseteq U$, ou seja, $U^c \subseteq A$, logo, como U^c é fechado, $U^c \subseteq A^\circ$ e assim $(A^\circ)^c \subseteq U$. Dessa maneira, $X = A^\circ \cup (A^\circ)^c \subseteq U$, i. e., $U = X$.

Suficiência: Digamos que $A \subseteq X$ é tal que o único aberto que contêm $A^\circ \cup A^c$ é X. Seja $F \in \Phi$ de maneira que $F \subseteq A$, então $A^c \subseteq F^c$, e com isso, $A^\circ \cup A^c \subseteq A^\circ \cup F^c$. Assim, por hipotese, $A^\circ \cup F^c = X$, logo, $F \subseteq A^\circ$.

c.q.p.

Teorema 3.2.8 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $A \subseteq B \subseteq X$, onde A é g-aberto relativo a B e B é g-aberto relativo a X, então A é g-aberto relativo a X.

Prova

Seja $F \subseteq X$ um conjunto fechado em (X, τ) de forma que $F \subseteq A$. Logo, $F \subseteq {A_B}^\circ$, onde ${A_B}^\circ$ é o interior de A no subespaço B ou seja, existe um aberto $U \subseteq X$, onde $F \subseteq U \cap B \subseteq A$.

Temos ainda que $F \subseteq B$. Como B é g-aberto em X, temos que $F \subseteq B^\circ$ e então $F \subseteq U \cap B^\circ \subseteq U \cap B \subseteq A$, i. e., $F \subseteq A^\circ$.

c.q.p.

O análogo do teorema 3.1.9 para conjuntos g-abertos é falso como será mostrado no exemplo seguinte:

Exemplo 3.2.9

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Vamos considerar os conjuntos $A = \{b\}$ e $Y = \{a, b\}$ no espaço (X, τ). Temos que A é g-aberto, pois o único fechado que está contido em A é $\emptyset$, assim, $\emptyset \subseteq A^\circ$. Porém, temos que A não é g-aberto no subespaço Y, uma vez que em Y, o conjunto A é fechado e assim $A \subseteq A$, mas $A^\circ = \emptyset$.

Temos agora o análogo do teorema 3.1.8:

Teorema 3.2.10 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $A \subseteq X$ é g-aberto e $B \subseteq X$ é tal que $A^\circ \subseteq B \subseteq A$, então B é g-aberto.

Prova

Digamos que $A^\circ \subseteq B \subseteq A$ onde A é g-aberto. Temos, assim, que $A^c \subseteq B^c \subseteq (A^\circ)^c = \overline{A^c}$. Como, por definição , A^c é g-fechado, temos, pelo teorema 3.1.8 que B^c é g-fechado, assim, B é g-aberto.

c.q.p.

Teorema 3.2.11 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $A \subseteq X$ é g-fechado se e somente se $\overline{A} - A$ é g-aberto.

Prova

Necessidade: Digamos que A seja g-fechado e Φ a coleção dos conjuntos fechados de (X, τ). Seja $F \in \Phi$ de forma que $F \subseteq \overline{A} - A$. Pelo teorema 3.1.2, temos que $F = \emptyset$, assim, $F \subseteq \left(\overline{A} - A\right)^{\circ}$.Logo, $\overline{A} - A$ é g-aberto.

Suficiência: Suponhamos agora que $\overline{A} - A$ é g-aberto. Seja $F \in \Phi$ de maneira que $F \subseteq \overline{A} - A$. Por hipotese, temos que,$F \subseteq \left(\overline{A} \cap A^c\right)^{\circ}$, i. e., $F \subseteq \left(\overline{A}\right)^{\circ} \cap (A^c)^{\circ}$, sabendo-se que $(A^c)^{\circ} = \left(\overline{A}\right)^c$,obtemos, $F \subseteq \left(\overline{A}\right)^{\circ} \cap \left(\overline{A}\right)^c$. Como $\left(\overline{A}\right)^{\circ} \subseteq \overline{A}$, temos que $F \subseteq \emptyset$, i. e., $F = \emptyset$. Assim, pelo teorema 3.1.2, A é g-fechado.

c.q.p.

3.3 Espaços $T_{1/2}$

Definição 3.3.1 *(Gaal, [11])*

Diremos que um espaço topológico (X, τ) é T_0 se e somente se para todo par de elementos distintos $x, y \in X$, existe um aberto U onde $x \in U$ e $y \notin U$ ou $x \notin U$ e $y \in U$.

Teorema 3.3.2 *(Gaal, [11])*

Se (X, τ) é um espaço topológico T_0 então para todo par de elementos distintos $x, y \in X$ temos que $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$.

Prova

Sejam $x, y \in X$ onde $x \neq y$. Por hipotese, exite um conjunto aberto U onde $x \in U$ e $y \notin U$ ou $x \notin U$ e $y \in U$. Sem perda de generalidade, digamos que $x \in U$ e $y \notin U$. Assim, $y \in U^c$ e $x \notin U^c$. Logo, como $\{y\} \subseteq U^c$ e U^c é fechado temos que $\overline{\{y\}} \subseteq U^c$. Como $x \notin U^c$, então $x \notin \overline{\{y\}}$.

c.q.p.

Definição 3.3.3 *(Gaal, [11])*

Diremos que um espaço topológico (X, τ) *é* T_1 *se e somente se para todo par de elementos distintos* $x, y \in X$*, existem abertos* U, V *onde:*

i. $x \in U$ *e* $y \notin U$*;*

ii. $y \in V$ *e* $x \notin V$*.*

Teorema 3.3.4 *Gaal, [11]*

Se (X, τ) *é um espaço topológico* T_1 *então todo subconjunto unitário é fechado, ou seja, dado* $x \in X$*, temos que* $\{x\}$ *é fechado.*

A demonstração desse resultado pode ser conferida em [11].

Definição 3.3.5 *(Levine, [17])*

Diremos que um espaço topológico (X, τ) *é* $T_{1/2}$ *se e somente se todo conjunto g-fechado é fechado.*

Teorema 3.3.6 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) *um espaço topológico. Se* (X, τ) *é* $T_{1/2}$*, então* (X, τ) *é* T_0*.*

Prova

Digamos que (X, τ) seja um espaço $T_{1/2}$. Sejam $x, y \in X$ distintos. Se $\{x\}$ é fechado, então $\{x\} = \overline{\{x\}}$ e $y \notin \overline{\{x\}}$. Caso $\{x\}$ não seja fechado, então $\{x\}^c$ é g-fechado, pois $\{x\}^c$ não é aberto e o único aberto que contém $\{x\}^c$ é X, assim, como $\overline{\{x\}^c} \subseteq X$, temos que $\{x\}^c$ é g-fechado. Por hipotese temos que (X, τ) é $T_{1/2}$ e como $\{x\}^c$ é g-fechado temos que $\{x\}^c$ é fechado e assim $\{x\}$ é aberto. Sendo $\{x\} = U \in \tau$, temos que $x \in U$ mas $y \notin U$.

c.q.p.

Teorema 3.3.7 *(Levine, [17])*

Seja (X, τ) um espaço topológico. Se (X, τ) é T_1, então (X, τ) é $T_{1/2}$.

Prova

Seja $A \subseteq X$ um conjunto g-fechado no espaço topológico (X, τ). Vamos mostrar que A é fechado, ou seja, $A = \overline{A}$. Para isso, mostraremos que $\overline{A} - A = \emptyset$.

Digamos, por absurdo, que existe $x \in X$ onde $x \in \overline{A} - A$. Assim, temos que $\{x\} \subseteq \overline{A} - A$. Pelo teorema 3.3.4, $\{x\}$ é fechado, porém, pelo teorema 3.1.2, o único conjunto fechado que está contido em $\overline{A} - A$ é o conjunto vazio. Absurdo!!!

Logo $\overline{A} - A = \emptyset$, i. e., $\overline{A} = A$.

c.q.p.

Exemplo 3.3.8

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Então o espaço (X, τ) é $T_{1/2}$, pois o único conjunto g-fechado (no caso $\{b\}$) é fechado. Porém (X, τ) não é T_1, pois o único aberto que contém b é X, que contém também a.

Exemplo 3.3.9

Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. O espaço (X, τ) é T_0, porém não é $T_{1/2}$, pois o conjunto $\{a, c\}$ é g-fechado porém não é fechado.

Corolário 3.3.10 *(Levine, [17])*

A propriedade de $T_{1/2}$ é estrita entre T_0 e T_1

Capítulo 4

Conjuntos g-fechados em L-topologias

Nesse capítulo sugerimos a definição de um conjunto g-fechado em um espaço L-topológico, como resultado obtemos muitos teoremas semelhantes de Levine, entre eles, a de todo conjunto g-fechado em um L-espaço compacto é compacto.

O capítulo está dividido em duas seções.

Na primeira seção trabalhamos com os conjuntos g-fechados em um espaço L-topológico. Na segunda seção sugerimos a nossa definição de conjunto g-aberto em um espaço L-topológico. Um L-conjunto f será g-aberto em um espaço L-topológico se e somente se f' for g-fechado.

4.1 Conjuntos g-fechados

Definição 4.1.1

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topologico. Diremos que um L-conjunto "a" é g-fechado se, e somente se:

$\forall f \in \Im, \forall p \in \mathrm{Pr}(L)$

$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p) \Longrightarrow (\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$

que poderá ser escrito como:

$\forall f \in \Im$:

$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in f) \Longrightarrow (\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\overline{a})' \Longrightarrow x_p \in f)$.

Definimos também o "g-fecho" de $a \in L^X$ ao L-conjunto

$$\overline{a}_g = \bigwedge \{f \in L^X | f \text{ é g-fechado e } a \leq f\}$$

Teorema 4.1.2

Todo subconjunto fechado é g-fechado.

Prova

Seja a um L-conjunto fechado de $(X, \Im)$, logo $a = \overline{a}$. Com isso, seja $f \in \Im$, de forma que, para todo $p \in Pr(L)$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in f)$$

Ou seja:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$$

então, temos que:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$$

i. e.:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\overline{a})' \Longrightarrow x_p \in f)$$

c.q.p.

O exemplo a seguir mostra que nem todo L-conjunto g-fechado é L-fechado:

Exemplo 4.1.3

Seja $L = X = [0; 1]$. Vamos considerar o reticulado $L = (L, \leq, 0, 1, ')$ onde $\leq$ é definido da maneira usual e $x' = 1 - x$.

Para não haver perigo de confusão, definimos 0_x e $1_x \in L^X$ como:

- $0_x(x) = 0$;
- $1_x(x) = 1$.

Para todo $x \in X$.

Podemos verificar que a coleção $\Im \subseteq L^X$ definida como:

$$\Im = \{a \in L^X \mid a(x) = x^k,\ k \in [1; \infty[\ \} \cup \{0_x; 1_x\}$$

é uma L-topologia em L^X.

Seja $u(x) = \sqrt{x} \in L^X$. Como $u' = 1 - u(x)$ não é L-aberto, temos que u não é L-fechado em $(X, \Im)$, porém, é g-fechado.

Para mostrar que u é g-fechado em $(X, \Im)$, seja $a \in \Im$ onde, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(u(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p) \qquad \text{(1)}$$

Mostraremos, nestas condições, que $a = 1_x$.

Como $x \geq x^k$ para todo $k \geq 1 \in \mathbb{R}$, basta mostrarmos que a afirmação (1) não é verdadeira para $a(x) = x$.

Seja então $a(x) = x$. Sabemos que $Pr([0; 1]) = [0; 1[$. A afirmação (1) será falsa se existem $p \in Pr([0; 1])$ e $x_0 \in [0; 1]$ onde:

$$f(x_0) \geq p' \text{ e } a(x_0) \leq p$$

Sejam $p = 0,5$ e $x_0 = 0,25$, então $p' = 1 - 0,5 = 0,5$, logo:

$$f(0,25) \geq 0,5 \text{ e } a(0,25) = 0,25 \leq 0,5$$

Logo, o único L-conjunto aberto que satisfaz a condição (1) é 1_x.

Como o único L-fechado que contém u é 1_x, temos que $\overline{u} = 1_x$, assim, é fácil verificar que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(1_x(x) \geq p' \Longrightarrow 1_x(x) \nleq p)$$

ou seja,

$$(\forall x \in X)(\overline{u}(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

i. e.:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X)(x_p \notin (\overline{u})' \Longrightarrow x_p \in a)$$

Assim, concluímos que u é g-fechado.

Teorema 4.1.4

A união "fuzzy" de dois L-conjuntos g-fechados é um g-fechado.

Prova

Sejam $a, b \in L^X$ conjuntos g-fechados. Seja $f \in \Im$ de modo que:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (a \vee b)' \Longrightarrow x_p \in f)$$

Ou seja, para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)((a \vee b)(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$$

queremos mostrar que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x \in X)((\overline{a \vee b})(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$$

Seja $p \in Pr(L)$. Vamos observar que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)$$

Como a, b são g-fechados, temos que:

$$\left.\begin{array}{c}(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)\\ e \\ (\forall x \in X)(\overline{b}(x) \geq p' \Longrightarrow f(x) \nleq p)\end{array}\right\} (1)$$

Seja $x \in X$ onde $x_p \notin (\overline{a \vee b})'$, i. e., $(\overline{a \vee b})(x) \geq p$. Como p' é coprimo, temos que $\overline{a}(x) \geq p'$ ou $\overline{b}(x) \geq p'$. Sendo $x \in X$ qualquer e por (1) obtermos:

$$(\forall x \in X)((\overline{a \vee b})(x) \geq p' \Longrightarrow \overline{a}(x) \geq p' \; ou \; \overline{b} \geq p' \Longrightarrow f \nleq p')$$

Como $f \in \Im$ e $p \in Pr(L)$ são quaisquer, a afirmação acima é válida para todo $f \in \Im$ e para todo $p \in Pr(L)$ e assim podemos escrever:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin \left(\overline{(a \vee b)}\right)' \Longrightarrow x_p \in f)$$

i. e., $a \vee b$ é g-fechado.

c.q.p.

Convém observar que nem sempre a interseção fuzzy de dois L-conjuntos g-fechados é g-fechado.

Exemplo 4.1.5

Seja $L = 0; 1$, $X = \{a; b; c\}$ *e* $\{0_x; \chi_{\{a\}}; 1_x\}$.

Temos $Pr(L) = \{1\}$ *e* $Cp(L) = \{0\}$.

O L-conjunto $\chi_{\{a;b\}}$ *é g-fechado no espaço* $(X, \Im)$, *pois, o único aberto* f *que satisfaz a condição:*

$$(\forall x \in X)(\chi_{\{a;b\}}(x) \geq 1 \Longrightarrow f(x) \nleq 0)$$

é o L-conjunto 1_x. *Logo, sabendo-se que* $\overline{\chi_{\{a;b\}}} = 1_x$, *a afirmação acima implica em:*

$$(\forall x \in X)(\overline{\chi_{\{a;b\}}}(x) \geq 1 \Longrightarrow f(x) \nleq 0)$$

Para todo $f \in \Im$.

De maneira analoga podemos mostrar que $\chi_{\{a;c\}}$ *é também um conjunto g-fechado no espaço* $(X, \Im)$.

Porém, $\chi_{\{a;b\}} \wedge \chi_{\{a;c\}} = \chi_{\{a\}}$ *não é um L-conjunto g-fechado.*

Para verificarmos a afirmação acima, basta obvervamos que

$$(\forall x \in X)(\chi_{\{a\}}(x) \geq 1 \Longrightarrow \chi_{\{a\}}(x)) \nleq 0)$$

e que $\overline{\chi_{\{a\}}} = 1_x$

Lema 4.1.6

Sejam $a, b, c \in L^X$ *onde* $a \leq b$. *Se* $x_p \notin a'$ *então* $x_p \notin b'$. *E ainda, se para todo* $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

então

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

Prova

Se $x_p \notin a'$ então $a'(x) \leq p$, ou seja $a(x) \geq p'$. Como $a \leq b$ temos que $b(x) \geq a(x) \geq p'$, i. e., $x_p \notin b'$.

Seja $p \in \Pr(L)$ e $x \in X$ onde $a(x) \geq p'$. Como $a \leq b$ obtemos $b(x) \geq p'$. Como x é qualquer, temos que

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow b(x) \geq p')$$

Sendo ainda que $p \in \Pr(L)$ é arbitrário, temos que o resultado acima vale para todo $p \in \Pr(L)$. Assim, por hipotese, para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow b(x) \geq p' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

c.q.p.

Teorema 4.1.7

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico e $a, b \in L^X$ onde a é g-fechado. Se b é tal que $a \leq b \leq \overline{a}$, então b é g-fechado.

Prova

Suponhamos que $a \leq b \leq \overline{a}$. Seja $c \in \Im$ de forma que

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in b' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

ou seja, para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

Queremos mostrar que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in \left(\overline{b}\right)' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

Seja $p \in \Pr(L)$. Como, por hipotese, $a \leq b$, pelo lema 4.1.6, temos que

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

Sendo a g-fechado, obtemos:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

Sabemos que $\overline{b} = \bigwedge\{g \in L^X; g \geq b \text{ } e \text{ } g' \in \Im\}$, com isso, como $\overline{a}$ é fechado, temos que $\overline{b} \leq \overline{a}$. E assim, pelo lema 4.1.6 e pelo resultado acima, obtemos:

$$(\forall x \in X)(\bar{b}(x) \geq p \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

Como $p \in \mathrm{Pr}(L)$ é qualquer, a afirmação acima é valida para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$.

Assim, podemos afirmar que:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in \left(\bar{b}\right)' \Longrightarrow c(x) \nleq p)$$

c.q.p.

Teorema 4.1.8

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-compacto. Se $a \in L^X$ é g-fechado em $(X, \Im)$ então a é L-compacto.

Prova

Seja $a \in L^X$ um L-conjunto g-fechado em $(X, \Im)$ e $\{f_i\}_{i \in J}$ uma família de L-conjuntos abertos tais que, para dado $p \in \mathrm{Pr}(L)$ temos:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Desejamos encontrar um conjunto $K \subseteq J$, K finito, onde:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in K} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Por a ser g-fechado e $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)$ ser aberto, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in J} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Como $\overline{a}$ é fechado e $(X, \Im)$ é compacto, temos que existe $K \subseteq J$, K finito, onde:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in K} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Por $a \leq \overline{a}$ e pelo lema 4.1.6 temos que

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow \left(\bigvee_{i \in K} f_i\right)(x) \nleq p)$$

Ou seja, a é L-compacto.

c.q.p.

Observação 4.1.9

Observe que se $Y \subseteq X$ *onde* X *é um conjunto parcialmente ordenado então, para todo* $p \in \mathrm{Pr}(L)$*:*

$$Y = \{x \in X \mid \chi_Y(x) \geq p'\}$$

Corolário 4.1.10

Seja $a \in L^X$*. Assim temos que para todo* $p \in \mathrm{Pr}(L)$

$$(\forall x \in X)(\chi_Y(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

se, e somente se,

$$(\forall y \in Y)(a(y) \nleq p)$$

Teorema 4.1.11

Seja $f, g \in L^X$*. Se* $Y \subseteq X$ *é tal que*

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \quad ou \quad (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$$

então, temos que:

$$(\forall y \in Y)[(f \wedge g)'(y) = 1]$$

Prova

Seja $p \in \mathrm{Pr}(L)$.

Dado $y \in Y$, temos que $\chi_Y(y) = 1$, e assim:

$$(f \wedge \chi_Y)(y) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(y) = 0$$

se, e somente se

$$f(y) = 0 \text{ ou } g(y) = 0$$

Com isso $(f \wedge g)(y) = 0$ i. e. $(f \wedge g)'(y) = 1$. Como $y \in Y$ é qualquer, temos que:

$$(\forall y \in Y)[(f \wedge g)'(x) = 1]$$

c.q.p.

Corolário 4.1.12

Seja $f, g \in L^X$. Se $Y \subseteq X$ é tal que

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$$

então, para todo $p \in \Pr(L)$, temos que

$$(\forall y \in Y)[(f \wedge g)'(x) \nleq p]$$

Para verificar o corolário acima, basta observamos que se $p \in \Pr(L)$, então $p \neq 1$.

Corolário 4.1.13

Seja $f, g \in L^X$. Se $Y \subseteq X$ é tal que

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \quad \text{ou} \quad (g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$$

então, para todo $p \in \Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(\chi_Y(x) \geq p' \Longrightarrow (f \wedge g)'(x) \nleq p)$$

Observação 4.1.14

Dados $a, b, c \in L$, temos que $(a \wedge b)' \nleq c$ se, e somente se, $a' \nleq c$ ou $b' \nleq c$.

Lema 4.1.15

Seja $L = (L, \leq, 0, 1)$ um conjunto totalmente ordenado. Então $Cp(L) = (0, 1]$.

Prova

É fácil verificar que $Cp(L) \subseteq (0, 1]$. Assim, vamos mostrar que $(0, 1] \subseteq Cp(L)$. Seja $a \in (0, 1]$ e $b, c \in L$ de forma que $a \leq b \vee c$. Sem perda de generalidade, digamos que $b \leq c$, assim, $b \vee c = c$. Logo, se $a \leq b \vee c$ então $a \leq c$, que implica em, $a \leq c$ ou $a \leq b$. Com isso $a \in Cp(L)$. Como a é qualquer, temos que $(0, 1] \subseteq Cp(L)$. Então $(0, 1] = Cp(L)$.

c.q.p.

Lema 4.1.16

Seja $L = (L, \leq, 0, 1)$ *um conjunto totalmente ordenado. Sejam* $f, g : X \to L$*. Se para todo* $p \in \Pr(L)$ *temos que*

$$(\forall x \in X)(f(x) \not\geq p' \text{ ou } g(x) \not\geq p')$$

então

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0).$$

Prova

Digamos, por absurdo, que exista x_0 onde $f(x_0) \neq 0$ e $g(x_0) \neq 0$. Seja $\alpha = f(x_0) \wedge g(x_0)$. Como L é totalmente ordenado, temos que $\alpha \neq 0$. Logo, pelo lema anterior, $\alpha \in (0, 1] = Cp(L) = \Pr(L)'$, e assim, deve existir $p \in \Pr(L)$ tal que $p' = \alpha$. Com isso $f(x_0) \geq p'$ *e* $g(x_0) \geq p'$. Absurdo!!! Logo,

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0).$$

c.q.p.

Teorema 4.1.17

Sejam $h, f, g \in L^X$*, onde* L *é totalmente ordenado. Se*

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin h' \Longrightarrow x_p \in (g \wedge f)')$$

então

$$(\forall x \in X)[(f \wedge h)(x) = 0 \text{ ou } (g \wedge h)(x) = 0].$$

Prova

Sejam f, g e $h \in L^X$ onde:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin h' \Longrightarrow x_p \in (g \wedge f)')$$

Ou seja, para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(h(x) \geq p' \Longrightarrow (g \wedge f)'(x) \nleq p)$$

Dado $p \in Pr(L)$, temos que:

$(\forall x \in X)(h(x) \geq p' \Longrightarrow (g \wedge f)'(x) \nleq p)$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(h(x) \ngeq p'$ *ou* $(g \wedge f)'(x) \nleq p)$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(h(x) \ngeq p'$ *ou* $g'(x) \nleq p$ *ou* $f'(x) \nleq p)$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(h(x) \ngeq p'$ *ou* $g(x) \ngeq p'$ *ou* $f(x) \ngeq p')$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(h(x) \ngeq p'$ *ou* $g(x) \ngeq p'$ *ou* $h(x) \ngeq p'$ *ou* $f(x) \ngeq p')$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)[(h\wedge g)(x) \ngeq p'$ *ou* $(h \wedge f)(x) \ngeq p')]$

Como $p \in \mathrm{Pr}(L)$ é arbritrário, temos que a afirmação acima é valida para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$. Assim, pelo lema 4.1.16 temos que:

$$(\forall x \in X)[(h \wedge g)(x) = 0 \;\; ou \;\; (h \wedge f)(x) = 0]$$

c.q.p.

Teorema 4.1.18

Sejam $f, g, h \in L^X$ *e* $Y \subseteq X$ *de forma que para todo* $p \in \mathrm{Pr}(L)$*, temos que*

$$(\forall x \in X)[(f \wedge g)(x) \geq p' \Longrightarrow h(x) \nleq p]$$

e ainda $\chi_Y \leq g$*, então*

$$(\forall x \in Y)[f(x) \geq p' \Longrightarrow h(x) \nleq p].$$

Prova

Digamos, por absurdo, que existe $y_0 \in Y$ onde $f(y_0) \geq p'$ mas $h(y_0) \leq p$.

Por $y_0 \in Y$, temos que $\chi_Y(y_0) = 1 \leq g(y_0)$, logo, $g(y_0) = 1$. Logo $(f \wedge g)(y_0) = f(y_0) \wedge g(y_0) = f(y_0) \wedge 1 = f(y_0) \geq p'$ e $h(y_0) \leq p$ i. e. (f$\wedge g)(y_0) \geq p' \nRightarrow h(y_0) \leq p$. Absurdo!!! Logo

$$(\forall x \in Y)[f(x) \geq p' \Longrightarrow h(x) \nleq p].$$

c.q.p.

Lema 4.1.19

Sejam $f, g \in L^X$ *e* $Y \subseteq X$*.Logo*

$$(\forall x \in Y)[f(x) = 0 \text{ } ou \text{ } g(x) = 0],$$

se e somente se,

$$(\forall x \in X)[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0 \text{ } ou \text{ } (g \wedge \chi_Y)(x) = 0].$$

Prova

Necessidade: Se $x \in Y$, então

$$(f \wedge \chi_Y)(x) = f(x) \wedge \chi_Y(x) = f(x) \wedge 1 = f(x)$$

e

$$(g \wedge \chi_Y)(x) = g(x) \wedge \chi_Y(x) = g(x) \wedge 1 = g(x),$$

assim, por hipotese $(f \wedge \chi_Y)(x) = f(x) = 0$ *ou* $(g \wedge \chi_Y)(x) = g(x) = 0$.

Caso $x \in X - Y$, temos que

$$(f \wedge \chi_Y)(x) = f(x) \wedge \chi_Y(x) = f(x) \wedge 0 = 0$$

e

$$(g \wedge \chi_Y)(x) = g(x) \wedge \chi_Y(x) = g(x) \wedge 0 = 0.$$

Suficiencia:Temos, por hipotese, que $[(f \wedge \chi_Y)(x) = 0$ ou $(g \wedge \chi_Y)(x) = 0]$, que equivale a $[f(x) \wedge \chi_Y(x) = 0$ ou $g(x) \wedge \chi_Y(x) = 0]$. Se $x \in Y$, obtemos $[f(x) \wedge 1 = 0$ ou $g(x) \wedge 1 = 0]$, ou seja, $[f(x) = 0$ ou $g(x) = 0]$. Como $x \in Y$ é qualquer, temos que

$$(\forall x \in Y)[f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0].$$

c.q.p.

Teorema 4.1.20

Seja $(X, \Im)$ *um espaço L-normal onde* $L = (L, \leq, 0, 1)$ *é totalmente ordenado. Se* $Y \subseteq X$ *é tal que* χ_Y *é g-fechado, então* $(Y, \Im_Y)$ *é L-normal.*

Prova

Seja F a coleção de todos os L-conjuntos fechados de $(X, \Im)$ e $f, g \in F$ onde

$$(\forall y \in Y)(f(y) = 0 \text{ ou } g(y) = 0)$$

e para todo $p \in \Pr(L)$ exitem $r, s, \in X$ onde $f(r) \geq p'$ e $g(s) \geq p'$.

Assim, pelo lema 4.1.19 temos que

$$(\forall x \in X)[f(x) \wedge \chi_Y(x) = 0 \text{ ou } g(x) \wedge \chi_Y(x) = 0]$$

Pelo corolário 4.1.13, obtemos que, para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(\chi_Y(x) \geq p' \Longrightarrow (f \wedge g)'(x) \not\leq p)$$

Como χ_Y é g-fechado e $(g \wedge f)'$ é aberto, temos que:

$$(\forall x \in X)(\overline{\chi_Y}(x) \geq p' \Longrightarrow (f \wedge g)'(x) \not\leq p)$$

Sendo L totalmente ordenado, pelo teorema 4.1.17, obtemos:

$$(\forall x \in X)[f(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) = 0 \text{ ou } g(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) = 0]$$

Vamos observar que $f \wedge \overline{\chi_Y}$ e $g \wedge \overline{\chi_Y}$ são fechados.

Por hipotese, para todo $p \in \Pr(L)$, existem $r, s \in Y$ onde $f(r) \geq p'$ e $g(s) \geq p'$. Como $\chi_Y \leq \overline{\chi_Y}$, se $z \in Y$, então $1 = \chi_Y(z) \leq \overline{\chi_Y}$, i. e., $\chi_Y(z) = \overline{\chi_Y}$. Assim, dado $p \in Pr(L)$, existem $r, s \in Y \subseteq X$ de forma que $(f \wedge \overline{\chi_Y})(r) = f(r) \wedge \overline{\chi_Y}(r) = f(r) \wedge 1 = f(r) \geq p'$ e $(g \wedge \overline{\chi_Y})(s) = g(s) \wedge \overline{\chi_Y}(s) = g(s) \wedge 1 = g(s) \geq p'$.

Por $(X, \Im)$ ser L-normal, existem $u, v \in \Im$ onde:

$$(\forall x \in X)(u(x) = 0 \text{ } ou \text{ } v(x) = 0)$$

e ainda, para todo $p \in \Pr(L)$,

$$(\forall x \in X)[f(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \not\leq p]$$

e

$$(\forall x \in X)[g(x) \wedge \overline{\chi_Y}(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \not\leq p]$$

Assim

$$(\forall y \in Y)(u(y) = 0 \text{ ou } v(y) = 0),$$

e como $\chi_Y \leq \overline{\chi_Y}$, pelo Teorema 4.1.18, temos:

$$(\forall y \in Y)[f(y) \geq p' \Longrightarrow u(y) \nleq p]$$

e

$$(\forall y \in Y)[g(y) \geq p' \Longrightarrow v(y) \nleq p]$$

ou seja:

$$(\forall y_p \in Pr(L^Y))[y_p \notin f' \Longrightarrow y_p \in u]$$

e

$$(\forall y_p \in Pr(L^Y))[y_p \notin g' \Longrightarrow y_p \in v].$$

c.q.p.

Teorema 4.1.21

Se $f, a \in L^X$ são tais que para todo $x \in X, f(x) = 0$ ou $a(x) = 0$, então:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in f')$$

Prova

Seja $p \in \mathrm{Pr}(L)$. Como $p \neq 1$, temos que $p' \neq 0$. Seja agora $x \in X$ onde $a(x) \geq p'$. Com isso, $a(x) \neq 0$ e por hipotese $f(x) = 0$. Dessa forma, $f'(x) = 1 \nleq p$. Como $p \in \mathrm{Pr}(L)$ é arbitrário, temos que para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow f'(x) \nleq p)$$

Ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in f')$$

c.q.p.

Teorema 4.1.22

Seja $L = (L, \leq, 0, 1)$ um conjunto totalmente ordenado e $a, f \in L^X$ de forma que:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in f')$$

então

$$(\forall x \in X)(a(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 0)$$

Prova

Sejam $a, f \in L^X$ onde:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in a' \Longrightarrow x_p \in f')$$

Dado $p \in \Pr(L)$, temos que:

$(\forall x \in X))(x_p \in a' \Longrightarrow x_p \in f')$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow f'(x) \nleq p)$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(\Longrightarrow f'(x) \nleq p)$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(a'(x) \leq p \text{ } ou \text{ } f'(x) \nleq p)$

$\Longleftrightarrow (\forall x \in X)(a(x) \ngeq p' \text{ } ou \text{ } f(x) \ngeq p')$

Como p é qualquer, pelo lema 4.1.16, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) = 0 \text{ } ou \text{ } f(x) = 0)$$

c.q.p.

Teorema 4.1.23

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-normal onde L é um conjunto totalmente ordenado. Se $f, a \in L^X$ são tais que f é fechado, a é g-fechado, para todo $p \in \Pr(L)$ existem $y, z \in X$ onde $f(y) \geq p'$ e $a(z) \geq p'$ e ainda,

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ } ou \text{ } a(x) = 0)$$

então existem abertos u_1 e u_2 tais que para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in u_1);$$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in u_2)$$

e

$$(\forall x \in X)(u_1(x) = 0 \text{ } ou \text{ } u_2(x) = 0)$$

Prova

Como para todo $f(x) = 0$ *ou* $a(x) = 0$, pelo teorema 4.1.21, obtemos,

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in f')$$

Ou seja, para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow f'(x) \nleq p)$$

Como f' é aberto e a é g-fechado, temos que para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow f'(x) \nleq p)$$

Sendo L totalmente ordenado, obtemos, pelo teorema 4.1.22:

$$(\forall x \in X)(f(x) = 0 \text{ } ou \text{ } \overline{a}(x) = 0)$$

E mais, como existe $z \in X$ onde $a(z) \geq p'$ e $\overline{a} \geq a$, pelo lema 4.1.6, $\overline{a}(z) \geq p'$.

Assim, como $(X, \Im)$ é L-normal e $\overline{a}$ e f são fechados, existem $u_1, u_2 \in \Im$ onde $(\forall x \in X)(u_1(x) = 0 \text{ } ou \text{ } u_2(x) = 0)$ e para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow u_2(x) \nleq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u_1(x) \nleq p)$$

Ainda pelo lema 4.1.6, temos que, para todo $p \in \Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow \overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow u_2(x) \nleq p)$$

Ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in u_1);$$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin a' \Longrightarrow x_p \in u_2)$$

e

$$(\forall \in X)(u_1(x) = 0 \text{ } ou \text{ } u_2(x) = 0)$$

c.q.p.

4.2 Conjuntos g-abertos

Definição 4.2.1

Um L-conjunto $a \in L^X$ é chamado de g-aberto se a' é g-fechado.

Teorema 4.2.2

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico e $\digamma$ a coleção de todos os L-conjuntos fechados de $(X, \Im,)$. O L-conjunto $a \in L^X$ é g-aberto se, e somente se, para todo $f \in \digamma$ onde para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

temos que

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a^{\circ}(x) \nleq p)$$

Que pode ser reescrito como:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in a)$$

temos que

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in a^{\circ})$$

Prova

Necessidade:Digamos que $f \in \digamma$ é tal que para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

Seja, então $p \in Pr(L)$. Assim

$$(\forall x \in X)(a(x) \leq p \Longrightarrow f(x) \ngeq p')$$

logo

$$(\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \Longrightarrow f'(x) \nleq p)$$

Como a' é g-fechado, temos que

$$(\forall x \in X)(\overline{a'}(x) \geq p' \Longrightarrow f'(x) \nleq p)$$

e assim

$$(\forall x \in X)(f'(x) \leq p \Longrightarrow \overline{a'}(x) \ngeq p')$$

ou seja

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow \overline{a'}'(x) \nleq p)$$

Como $\overline{a'} = (a^{\circ})'$, i. e., $\left(\overline{a'}\right)' = a^{\circ}$, temos que:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a^{\circ}(x) \nleq p)$$

Como $p \in Pr(L)$ é qualquer, temos que a afirmação acima é verdadeira para todo $p \in Pr(L)$.

Suficiência: Seja $b \in \Im$ onde, para todo $p \in \mathrm{Pr}(L)$:

$$(\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \Longrightarrow b(x) \nleq p)$$

Seja $p \in Pr(L)$. Assim:

$$(\forall x \in X)(b(x) \leq p \Longrightarrow a'(x) \ngeq p')$$

ou seja

$$(\forall x \in X)(b'(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

Como b' é fechado temos, por hipotese:

$$(\forall x \in X)(b'(x) \geq p' \Longrightarrow a^{\circ}(x) \nleq p)$$

Com isso

$$(\forall x \in X)(a^{\circ}(x) \leq p \Longrightarrow b'(x) \ngeq p')$$

i. e.

$$(\forall x \in X)((a^{\circ})'(x) \geq p' \Longrightarrow b(x) \nleq p)$$

Como $(a^{\circ})' = \overline{a'}$, temos:

$$(\forall x \in X)(\overline{a'}(x) \geq p' \Longrightarrow b(x) \nleq p)$$

Como $p \in Pr(L)$ é qualquer, temos que a afirmação acima é verdadeira para todo $p \in Pr(L)$, ou seja, a' é g-fechado.

c.q.p.

Definição 4.2.3

Diremos que os conjuntos $a, b \in L^X$ são separados no espaço L-topológico $(X, \Im)$ se e somente se, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(\overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow b(x) \leq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(\overline{b}(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \leq p)$$

ou seja, $a, b \in L^X$ são separados se e somente se:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (\overline{a})' \Longrightarrow x_p \notin b)$$

$$e$$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin \left(\overline{b}\right)' \Longrightarrow x_p \notin a)$$

Lema 4.2.4

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico, $a, b, c \in L^X$ onde a, b são separados e para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin c' \Longrightarrow x_p \in (a \vee b))$$

Então, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (c \wedge \overline{a})' \Longrightarrow x_p \in a)$$

$$e$$

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin \left(c \wedge \overline{b}\right)' \Longrightarrow x_p \in b)$$

Prova

Seja $x_p \in Pr(L^X)$ onde $x_p \in c \wedge \overline{a}$, ou seja, $(c \wedge \overline{a})(x) \geq p'$, então:

$$(c \wedge \overline{a})(x) \geq p' \Longrightarrow c(x_0) \geq p' \text{ } e \text{ } \overline{a}(x) \geq p'$$

temos assim, por hipotese, que

$$c(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)(x) \nleq p \Longrightarrow a(x) \nleq p \text{ } ou \text{ } b(x) \nleq p$$

Como a, b são separados, $\overline{a}(x) \geq p'$ implica que $b(x) \leq p$, assim, podemos afirmar que:

$$c(x) \wedge \overline{a}(x) \geq p' \Longrightarrow a(x)$$

Como x é qualquer, a afirmação acima é válida para qualquer $x \in X$. E como $p \in Pr(L)$ também é qualquer, temos, em resumo que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((c \wedge \overline{a})(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (c \wedge \overline{a})' \Longrightarrow x_p \in a)$$

Por um raciocinio análogo, podemos mostrar que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin \left(c \wedge \overline{b}\right)' \Longrightarrow x_p \in b)$$

c.q.p.

Teorema 4.2.5

Se $a, b \in L^X$ são g-abertos separados, então $a \vee b$ é g-aberto.

Prova

Seja $\digamma$ a coleção de todos os L-conjuntos fechados de $(X, \Im)$ e $f \in \digamma$ onde

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin (a \vee b)' \Longrightarrow x_p \in f)$$

i. e., para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)(x) \nleq p)$$

assim, pelo lema anterior, temos que:

$$(\forall x \in X)((f \wedge \overline{a})(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

logo, como $\overline{a} \wedge f \in \digamma$ e a é g-aberto, pelo teorema 4.2.2. temos que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((f \wedge \overline{a})(x) \geq p' \Longrightarrow a^\circ \nleq p)$$

De maneira analoga, mostramos que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)((\overline{b} \wedge f)(x) \geq p' \Longrightarrow b^\circ \nleq p)$$

logo, dado $p \in Pr(L)$ e $x_0 \in X$ onde $f(x_0) \geq p'$ temos que:

$$\begin{aligned}
f(x_0) \geq p' &\Longrightarrow f(x_0) \wedge (a \vee b)(x_0) \geq p' \\
&\Longrightarrow (f(x_0) \wedge a(x_0)) \vee (f(x_0) \wedge b(x_0)) \geq p' \\
&\Longrightarrow (f(x_0) \wedge \overline{a}(x_0)) \vee (f(x_0) \wedge \overline{b}(x_0)) \geq p' \\
&\Longrightarrow (f(x_0) \wedge \overline{a}(x_0)) \geq p' \textit{ ou } (f(x_0) \wedge \overline{b}(x_0)) \geq p' \\
&\Longrightarrow a^\circ(x_0) \nleq p \textit{ ou } b^\circ(x_0) \nleq p \\
&\Longrightarrow (a^\circ(x_0) \vee b^\circ(x_0)) \nleq p
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (a^\circ \vee b^\circ(x_0)) \nleq p$$
$$\Longrightarrow (a \vee b)^\circ(x_0) \nleq p$$

Como $p \in Pr(L)$ e $x_0 \in X$ são quaisquer, temos que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)^\circ(x) \nleq p)$$

ou seja:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in f' \Longrightarrow x_p \in (a \vee b)^\circ)$$

c.q.p.

Lema 4.2.6

Sejam X um conjunto qualquer, L um reticulado,$a \in L^X$ e $B \subseteq X$ de forma que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow \chi_B(x) \nleq p)$$

então para todo $p \in Pr(L)$ e para todo $x \in B^c$ temos que $a(x) \ngeq p'$.

Prova

Sejam $a \in L^X$ e $B \subseteq X$ como acima. Digamos, por absurdo, que existem $x_0 \in B^c$, $p \in Pr(L)$ onde $a(x_0) \geq p'$. Assim, $\chi_B(x_0) \nleq p$. Como $x_0 \in B^c$, temos que $0 = \chi_B(x_0) \nleq p$. Absurdo!!! Logo, para todo $p \in Pr(L)$ e $x \in B^c$, obtemos $a(x) \ngeq p'$.

c.q.p.

Teorema 4.2.7

Seja $(X, \Im_X)$ um espaço L-topológico. Se $a \leq \chi_B$ onde $B \subseteq X$, a é g-aberto em relação ao subespaço $(B, \Im_B)$ e χ_B é g-aberto em relação ao espaço $(X, \Im_X)$, então a é g-aberto em relação à $(X, \Im_X)$.

Prova

Seja f um L-conjunto fechado em relação ao espaço $(X, \Im_X)$ onde

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in a)$$

Ou seja, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

Então, pelo lema 4.1.6, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow \chi_B \nleq p)$$

Como a é g-aberto no espaço $(B, \Im_B)$, temos que existe $u \in \Im_X$ onde:

$$(\forall x \in B)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

e $u(x) \leq a(x)$, para todo $x \in B$.

Como, para todo $p \in Pr(L)$

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow \chi_B(x) \nleq p)$$

temos, pelo lema 4.2.6, que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(x \in B^c)(f(x) \ngeq p')$$

Isso nos garante que, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Como χ_B é g-aberto em $(X, \Im_X)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow \chi_B{}^\circ(x) \nleq p)$$

Pelos resultados acima:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow (u(x) \nleq p \ e \ \chi_B{}^\circ)(x) \nleq p)$$

Sabendo-se que $p \in Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow (u \wedge \chi_B{}^\circ)(x) \nleq p)$$

Como $u \leq a \leq \chi_B$, $u \in \Im$:

$$u \wedge \chi_B{}^\circ \leq u \leq a$$

logo,

$$u \wedge \chi_B{}^\circ \leq a^\circ$$

e com isso, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a^{\circ}(x) \nleq p)$$

i. e.:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in a^{\circ})$$

c.q.p.

Teorema 4.2.8

Seja $(X, \Im)$ um espaço L-topológico e $a, b \in L^X$ onde a é g-aberto. Se b é tal que $a^{\circ} \leq b \leq a$, então b é g-aberto.

Prova

Digamos que $b \in L^X$ é tal que $a^{\circ} \leq b \leq a$, onde a é g-aberto. Assim, por definição a' é g-fechado e $a' \leq b \leq \overline{a^{\circ}}$. Logo, pelo teorema 4.1.7, temos que b' é g-fechado, i. e., b é g-aberto.

c.q.p.

Capítulo 5

Espaços de Alexandroff e conjuntos g*-fechados

Neste capítulo apresentamos os espaços de Alexandroff e os conjuntos g*-fechados, o análogo aos conjuntos g-fechados para espaços de Alexandroff.

O capítulo está dividido em três seções: A primeira é dedicada a algumas definições e resultados básicos em espaços de Alexandroff; na segunda seção temos a definição de conjuntos g*-fechados onde podemos observar que estes possuem alguns resultados semelhantes aos conjuntos g-fechados em espaços topológicos. Já na terceira seção tratamos de conjuntos g*-abertos e alguns resultados. Na quarta seção é apresentado um axioma de separação em um espaço de Alexandroff.

5.1 Algumas definições e resultados

Definição 5.1.1 *(Alexandroff, [1])*

Seja X um conjunto qualquer e δ uma coleção de subconjuntos de X.Diremos que o par (X, δ) é um espaço de Alexandroff se:

i. $\emptyset, X \in \delta$;

ii. Se $F_i \in \delta,\ i = 1, ..., n,$ então $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \delta$, i. e., a união finita de elementos de δ pertence a δ;

iii. *Se $F_i \in \delta$, onde $i \in J$, sendo J enumeravel, então $\bigcap\limits_{i \in J} F_i \in \delta$, i. e., a interseção enumeralvel de elementos de δ pertence a δ.*

Os elementos de δ são chamados de fechados e seus complementares chamaremos de abertos. A família dos conjuntos abertos de (X, δ) será representado por α de onde temos os seguintes resultados:

i. $\emptyset, X \in \alpha$;

ii. Se $A_i \in \alpha$, $i = 1, ..., n$, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \alpha$, i. e., a intersecção finita de elementos de α pertence a α;

iii. Se $A_i \in \alpha$, onde $i \in J$, sendo J enumeravel, então $\bigcup\limits_{i \in J} A_i \in \alpha$, i. e., a união enumeralvel de elementos de α pertence a α.

O espaço de Alexandroff (X, δ) pode ser definido apartir dos seus conjuntos abertos. Este espaço designaremos por (X, α). Assim, não faremos distinção entre os espaços (X, δ) e (X, α).

Podemos verificar que todo espaço topológico é de Alexandroff,mas a reciproca não é verdadeira como verifica-se no exemplo seguinte:

Exemplo 5.1.2

Seja X um conjunto não-enumeravel e seja δ a coleção de todos os conjuntos cujo complementar é enumerável mais o conjunto vazio e seja α a família do complementar de todos os elementos de δ, i. e., α é o conjunto de todos os conjuntos finitos ou enumeráveis mais o conjunto X. Assim (X, α) é um espaço de Alexandroff, pois:

i. *$X, \emptyset \in \alpha$ uma vez que $\emptyset$ é, por definição, finito;*

ii. *Se $A_i \in \alpha, i = 1, ..., n$, então, cada conjunto A_i é enumerável ou finito, e com isso, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ é também enumerável ou finito, ou seja, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \alpha$;*

iii. *Se $A_i \in \alpha, i \in J$ onde J é enumerável, então $\bigcup\limits_{i \in J} A_i \in \alpha$, pois a união enumerável de conjuntos enumeráveis ou finitos é um conjunto enumerável.*

Porém, (X, α) não é um espaço topológico, uma vez que a união não -enumerável de conjuntos enumeráveis ou finitos pode ser um conjunto não -enumerável. Para verificar isso, basta tomarmos a coleção de todos os conjutos unitários de X. Cada elementos desta coleção é finitio, porém a união de todos os seus elementos é o conjunto X que por hipotese é não -enumerável.

Definição 5.1.3 *(Alexandroff, [1])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$. Chamaremos de fecho de A em (X, α) a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém A. Indicaremos o fecho de A por $\overline{A}$.

Observe que nem sempre o fecho de um conjunto em um espaço de Alexandroff é fechado, uma vez que podem existir não-enumeráveis conjuntos fechados que contém A. Convém notar ainda que $A \subseteq \overline{A}$ para todo $A \subseteq X$.

Teorema 5.1.4

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff, Se A, B são subconjuntos de X de forma que $A \subseteq \overline{B}$, então $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Prova

Vamos denotar δ_A e δ_B as coleções de todos os fechados de (X, α) que contém A e que contém B respectivamente. Assim:

$$A \subseteq \overline{B} = \bigcap_{F \in \delta_B} F$$

ou seja, dado $F \in \delta_B$, temos que $A \subseteq F$. Como, por definição, F é fechado, temos que $F \in \delta_A$, de onde concluímos que:

$$\delta_B \subseteq \delta_A$$

Logo:

$$\overline{A} = \bigcap_{G \in \delta_A} G \subseteq \bigcap_{F \in \delta_B} F = \overline{B}$$

c.q.p.

Corolário 5.1.5

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Se A, B são subconjuntos de X de forma que $A \subseteq B$, então $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

Prova

Sabemos que $B \subseteq \overline{B}$, assim, $A \subseteq \overline{B}$ e pelo teorema anterior $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

c.q.p.

Definição 5.1.6 *(Alexandroff, [1])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que um conjunto A é bicompacto se e somente se toda cobertura aberta de A possui uma subcorbetura finita.

Definição 5.1.7 *(Lahiri e Das, [16])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que dois conjuntos A, B em X são fracamente separados se existem dois abertos U, V tais que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $A \cap V = B \cap U = \emptyset$.

Definição 5.1.8 *(Alexandroff, [1])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que (X, α) é T_0 se para todo $x, y \in X$, onde $x \neq y$, existe um aberto U onde $x \notin U$ e $y \in U$ ou $x \in U$ e $y \notin U$.

Definição 5.1.9 *(Alexandroff, [1])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que (X, α) é T_1 se para todo $x, y \in X$, onde $x \neq y$, existem abertos U e V onde $x \in U$ e $y \in V$.

Definição 5.1.10 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção dos conjuntos fechados de (X, α). Diremos que (X, α) é regular se e somente se para todo $x \in X$ e $F \in \delta$ onde $x \notin F$, existem abertos disjuntos V e U, i. e., $V \cap U = \emptyset$ onde $x \in V$ e $F \subseteq U$.

Teorema 5.1.11 *(Das e Rashid, [8])*

Um espaço de Alexandroff (X, α) é regular se e somente se para todo $x \in X$ e para todo aberto U contendo x, existe um aberto V e um fechado F tais que $x \in V \subseteq F \subseteq U$.

Prova

Necessidade: Seja (X, α) um espaço de Alexandroff regular. Sejam $x \in X$ e $U \in \alpha$ de modo que $x \in U$. Assim U^c é um fechado que não contém x. Com isso, por (X, α) ser um espaço regular, temos que existem abertos $V, W \in \alpha$ onde $x \in W$, $U^c \subseteq W$ e $V \cap W = \emptyset$. Seja $F = W^c$, assim definido, o conjunto F é fechado. Como $V \cap W = \emptyset$, temos que $V \subseteq W^c = F$. e ainda, sendo que $U^c \subseteq W$, obtemos $W^c \subseteq U$, i. e., $F \subseteq U$, logo:

$$x \in V \subseteq F \subseteq U$$

Suficiência: Digamos que no espaço de Alexandroff (X, α), para todo $x \in X$ e $U \in \alpha$ onde $x \in U$ existem V aberto e F fechado onde:

$$x \in V \subseteq F \subseteq U$$

Vamos mostrar que (X, α) é regular. Seja δ a coleção dos conjuntos fechados de (X, α), $x \in X$ e $G \in \delta$ onde $x \notin G$. Assim, $x \in G^c$, onde G^c é aberto. Por hipotese, existe $F \in \delta$ onde $x \in F \subseteq G^c$. Com isso, temos que $G \subseteq F^c$. Seja $W = F^c$. Observe que assim, W é um aberto que contém G mas não contém x. Ainda por hipotese, temos que existe V aberto onde $x \in V \subseteq F = W^c \subseteq\ G^c$. Assim, $V \subseteq W^c$ de onde temos que $V \cap W = \emptyset$. Logo $x \in U, G \subseteq W$ e $V \cap W = \emptyset$.

c.q.p.

Teorema 5.1.12 *(Das e Rashid, [9])*

Um espaço de Alexandroff (X, α) *é* T_0 *se e somente se para todo* $x, y \in X$ *onde* $x \neq y$ *implica em* $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Prova

Necessidade: Seja (X, α) um espaço de Alexandroff T_0. Sejam $x, y \in X$ de forma que $x \neq y$. Digamos, sem perda de generalidade, que existe $U \in \alpha$ onde $x \in U$ e $y \notin U$. Assim, $y \in U^c$ e $x \notin U^c$, onde U^c é fechado. Dessa maneira, $\{y\} \subseteq U^c$, i. e., U^c é um fechado que contém $\{y\}$ e com isso $\overline{\{y\}} \subseteq U^c$. Dessa maneira, como $x \notin U^c$, temos que $x \notin \overline{\{y\}}$. E assim, sendo que $x \in \{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$, obtemos:

$$\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$$

Suficiência: Digamos que (X, α) é um espaço de Alexandroff onde para todo $x, y \in X$, $x \neq y$ temos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Dessa maneira, temos que $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$. De fato, digamos, por absurdo, que $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Assim, temos que $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$. Com isso, pelo teorema 5.1.4, obtemos $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$ e de maneira analoga, podemos mostrar que $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$, logo $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, o que é um absurdo, uma vez que $x \neq y$. Digamos agora, sem perda de generalidade, que $x \notin \overline{\{y\}}$. Assim, $x \in (\overline{\{y\}})^c$. O conjunto $\overline{\{y\}}$ não é, necessáriamente, fechado, assim, não podemos afirmar que $x \in (\overline{\{y\}})^c$ é aberto. Por $x \in (\overline{\{y\}})^c$ temos que:

$$x \in \left(\bigcap_{F \in \delta_B} F \right)^c = \bigcup_{F \in \delta_B} F^c$$

onde δ_y é o conjunto de todos os fechados que contém y. É fácil ver que:

$$\{F^c | y \in F \ e \ F \in \delta\} = \{A | y \notin A \ e \ A \in \alpha\} = \alpha_{y^-}$$

logo:

$$x \in \left(\bigcap_{F \in \delta_B} F \right)^c = \bigcup_{F \in \delta_B} F^c = \bigcup_{A \in \alpha_{y^-}} A$$

Assim, deve existir um conjunto $A \in \alpha_{y^-}$ onde $x \in A$, ou seja, um conjunto aberto A onde $x \in A$ e $y \notin A$.

c.q.p.

5.2 Conjuntos g*-fechados

Definição 5.2.1 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que o conjunto $A \subseteq X$ é g-fechado se e somente se existe um fechado F que contém A onde para todo aberto U temos que $A \subseteq U$ implica em $F \subseteq U$.*

É fácil ver que todo conjunto fechado é g*-fechado, porém, a reciproca nem sempre é verdadeira conforme podemos verificar no exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.2

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R}$. Assim, definindo $\alpha = C \cup \{\mathbb{R}\}$, temos que $(\mathbb{R}, \alpha)$ é um espaço de Alexandroff. O subconjunto $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ não é fechado, pois $(0, \infty)^c = (-\infty, 0]$ não é enumerável, porém, $(0, \infty)$ é g-fechado, uma vez que o único aberto que o contém é $\mathbb{R}$ que também é fechado. Assim, como $\mathbb{R}$ é também fechado, temos que $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, i. e., $(0, \infty)$ é g*-fechado.*

Teorema 5.2.3 *(Das e Rashid, [8])*

Um conjunto A no espaço de Alexandroff (X, α) é g-fechado se e somente se existe um conjunto fechado F contendo A tal que o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio, i. e., se H é fechado e $H \subseteq F - A$, então $H = \emptyset$.*

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α).

Necessidade: Digamos que A é g*-fechado no espaço de Alexandroff (X, α). Então, por definição, existe um conjunto fechado F que contém A e que está contido em todo aberto que contém A, i. e.,

$$\text{se } U \in \alpha, A \subseteq U, \text{ então } F \subseteq U$$

Assim, vamos mostrar que o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio. Seja H um conjunto fechado do espaço (X, α) onde $H \subseteq F - A = F \cap A^c$, então:

$$H \subseteq F, \text{ e } H \subseteq A^c$$

Logo, $A \subseteq H^c$. Como H^c é aberto, temos que $F \subseteq H^c$, logo $H \subseteq F^c$. Com isso, $H \subseteq F \cap F^c = \emptyset$.

Suficiência: Digamos agora que existe $F \in \delta$, com $A \subseteq F$ onde o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio, i. e.,

$$\text{se } H \in \delta, H \subseteq F - U, \text{ então } F = \emptyset.$$

Vamos mostar que A é g*-fechado. Seja $U \in \alpha$ onde $A \subseteq U$, provaremos que $F \subseteq U$.

Por $A \subseteq U$, temos que $U^c \subseteq A^c$, e assim $F \cap U^c \subseteq F \cap A^c = F - A$, ou seja, $F - U \subseteq F - A$. Como $F, U^c \in \delta$, temos que $F - U = F \cap U^c \in \delta$, logo, por hipotese, $F \cap U^c = \emptyset$, o que implica em $F \subseteq U$. Como U é um aberto qualquer de (X, α) contendo A, temos que a afirmação acima é válida para todo $U \in \alpha$ onde $A \subseteq U$.

c.q.p.

Corolário 5.2.4 *(Das e Rashid, [8])*

Um conjunto g-fechado A é fechado se e somente se tanto $\overline{A}$ como $\overline{A} - A$ são fechados.*

Prova

Seja A um conjunto g*-fechado no espaço de Alexandroff (X, α).

Necessidade: Digamos que A seja fechado, então é imediato que $A = \overline{A}$, i. e., $\overline{A}$ é fechado e assim $\overline{A} - A = \emptyset$ é fechado.

Suficiência: Digamos agora que $\overline{A}$ e $\overline{A} - A$ são fechados, então, pelo teorema acima, existe F fechado com $A \subseteq F$ onde o único fechado contido em $F - A$ é o conjunto vazio. Como, por definição, $\overline{A} \subseteq F$, temos que:

$$\overline{A} - A \subseteq F - A$$

Por hipotese, temos que $\overline{A} - A$ é fechado e pelo teorema acima, por A ser g*-fechado, temos que:

$$\overline{A} \cap A^c = \overline{A} - A = \emptyset$$

ou seja:

$$\overline{A} \subseteq A$$

e como $A \subseteq \overline{A}$, temos que

$$A = \overline{A}$$

sendo $\overline{A}$ fechado, temos que A é fechado.

c.q.p.

Teorema 5.2.5 *(Das e Rashid, [8])*

Um conjunto A no espaço de Alexandroff (X, α) é g-fechado se e somente se existe um conjunto fechado F contendo A tal que $F \subseteq ker(A) = \bigcap\{U \subseteq X | U \in \alpha$ e $A \subseteq U\}$.*

Prova

Necessidade: Seja A g*-fechado e δ a coleção de todos os fechados de (X, α). Assim, existe $F \in \delta$ com $A \subseteq F$ onde para todo U aberto onde $A \subseteq U$ temos que $F \subseteq U$. Seja α^A a coleção de todos os abertos que contém A. Assim, dado $U \in \alpha^A$, temos que $F \subseteq U$, logo:

$$F \subseteq \bigcap_{U \in \alpha^A} U$$

Suficiência: Digamos que $F \in \delta$ onde $A \subseteq F$ e $F \subseteq \bigcap_{U \in \alpha^A} U$, assim, temos que, dado $V \in \alpha^A$:

$$F \subseteq \bigcap_{U \in \alpha^A} U \subseteq V$$

ou seja,

$$F \subseteq V$$

c.q.p.

Teorema 5.2.6 *(Das e Rashid, [8])*

A união de dois conjuntos g-fechados é g*-fechado.*

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e sejam $A, B \subseteq X$ conjuntos g*-fechados em (X, α). Assim, existem $F_A, F_B \in \delta, A \subseteq F_A, B \subseteq F_B$, onde, para todo $U_A, U_B \in \alpha$ onde $A \subseteq U_A$ e $B \subseteq U_B$, temos que:

$$F_A \subseteq U_A \text{ e } F_B \subseteq U_B$$

Vamos mostar que $F_A \cup F_B$ está contido em todo U aberto onde $A \cup B \subseteq U$. Seja $F = F_A \cup F_B \in \delta$, assim, seja $U \in \alpha$ onde $A \cup B \subseteq U$. Logo, $A \subseteq F_A \subseteq U$ e $B \subseteq F_B \subseteq U$, com isso:

$$A \cup B \subseteq F_A \cup F_B = F \subseteq U$$

logo, como U é qualquer, temos que $A \cup B$ é g*-fechado.

c.q.p.

Como podemos verificar em [17], a intersecção de dois conjuntos g*-fechados nem sempre é um conjunto g*-fechado.

Teorema 5.2.7 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$ um conjunto g-fechado em (X, α). Se $B \subseteq X$ é tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é g*-fechado.*

Prova

Seja $U \in \alpha$ onde $B \subseteq U$, assim, $A \subseteq U$ e por A ser g*-fechado, existe $F \in \delta$ com $A \subseteq F$, onde $F \subseteq U$ e ainda, como, $A \subseteq F$, temos que $\overline{A} \subseteq F$, logo:

$$B \subseteq \overline{A} \subseteq F \subseteq U$$

Como $U \in \alpha$ é qualquer, temos que a afirmação acima é válida para todo $U \in \alpha$ onde $B \subseteq U$, i. e., B é g*-fechado.

c.q.p.

Definição 5.2.8

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$. Chamaremos de subespaço de (X, α) relativo ao conjunto A ao espaço (A, α_A) onde:

$$\alpha_A = \{U \cap A | U \in \alpha\}$$

É fácil ver que (A, α_A) satisfaz as propriedades de um espaço de Alexandroff.

Diremos que um conjunto $B \subseteq A$ é fechado no subespaço (A, α_A) se e somente se $A - B$ é aberto em (A, α_A).

Teorema 5.2.9

Seja (A, α_A) um subespaço do espaço de Alexandroff (X, α). O conjunto $B \subseteq A$ é fechado no subespaço (A, α_A) se e somente se existe um fechado $F \subseteq X$ onde $B = F \cap A$, i. e., a coleção δ_A dos conjuntos fechados de (A, δ_A) é dado por:

$$\delta_A = \{F \cap A | F \in \delta\}$$

onde δ é a coleção dos conjuntos fechados do espaço (X, α).

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção dos fechados em (X, α).

Necessidade: Seja B um conjunto fechado no subespaço (A, α_A) de (X, α). Assim, por definição , $A - B$ é aberto. Logo, existe $U \in \alpha$ onde:

$$A - B = A \cap U$$

Assim:

$$B = A-(A-B) = A-(A\cap U) = A\cap(A\cap U)^c = A\cap(A^c\cup U^c) = (A\cap A^c)\cup(A\cap U^c)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap U^c) = A \cap U^c$$

como U é aberto, temos que U^c é fechado.

Suficiência: Digamos, agora, que $F \in \delta$. Vamos mostrar que $A \cap F$ é um fechado no subespaço (A, α_A). Para isso, mostraremos que $A - (A \cap F)$ é aberto.

Temos que:

$$A-(A\cap F) = A\cap(A\cap B)^c = A\cap(A^c\cup F^c) = (A\cap A^c)\cup(A\cap F^c) = \emptyset\cup(A\cap F^c) = A\cap F^c$$

Como F^c é aberto em (X, α), temos, por definição , que $A - (A \cap F) \in \alpha_A$, logo $A \cap F$ é fechado em (A, α_A).

c.q.p.

Lema 5.2.10

Se um conjunto $A \subseteq X$ é aberto e g-fechado no espaço de Alexandroff (X, α), então A é também fechado.*

Prova

Como A é g*-fechado, existe um conjunto fechado F em (X, α) onde para todo aberto U contendo A temos que $A \subseteq F \subseteq U$. Sendo A aberto e sabendo-se que $A \subseteq A$, obtemos:

$$A \subseteq F \subseteq A$$

ou seja $A = F$, assim, A é fechado.

c.q.p.

Teorema 5.2.11 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e A um conjunto aberto e g-fechado em (X, α). O conjunto $B \subseteq A$ é g*-fechado no subspaço (A, α_A) se e somente se B é g*-fechado em (X, α).*

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff, (A, α_A) um subespaço de (X, α) e δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α).

Necessidade: Digamos que $B \subseteq A$ é g*-fechado em (A, α_A). Então , existe F_A fechado em (A, α_A) contendo B onde, para todo $U_A \in \alpha_A$ temos que $B \subseteq U_A$ implica em $B \subseteq F_A$.

Vamos mostrar que existe $F \in \delta$ onde para todo $U \in \alpha$, sendo $B \subseteq U$, temos que $B \subseteq F \subseteq U$.

Seja $U \in \alpha$ onde $B \subseteq U$. Como $B \subseteq A$, temos que $B = B \cap A$, assim:

$$B = B \cap A \subseteq B \cap U$$

como $B \cap U$ é aberto em (A, α_A), temos:

$$B \subseteq F_A \subseteq B \cap U \subseteq U$$

por F_A ser fechado em (A, α_A), pelo teorema 5.2.9, existe $F \in \delta$ onde $F_A = F \cap A$. E ainda, pelo lema 5.2.11, A é fechado, logo, F_A, logo, $F_A = F \cap A$ é fechado em (X, α). Como isso, sendo $F = F_A$, temos que,

$$B \subseteq F \subseteq U$$

Como U é um aberto qualquer que contém A, temos que a afirmação acima é válida para todo $U \in \alpha$ onde $A \subseteq U$.

Suficiência: Seja agora $B \subseteq A$ um conjunto g*-fechado no espaço (X, α). Vamos mostrar que B é g*-fechado em (A, α_A).

Antes porém, mostraremos que $\alpha_A \subseteq \alpha$. Seja $U_A \in \alpha_A$. Assim, por definição , existe $U \in \alpha$ onde $U_A = A \cap U$. Como $A \in \alpha$ temos que $U_A = A \cap U$ é aberto em (X, α). Ou seja, todo aberto de (A, α_A) é também um aberto em (X, α).

Logo, por hipotese, existe $F \in \delta$ onde para todo $U_A \in \alpha_A, B \subseteq U_A$, temos que

$$B \subseteq F \subseteq U_A$$

E ainda, pelo teorema 5.2.9, o conjunto F é também fechado no subespaço (A, α_A) pois, dado $U \cap A = U_A \in \alpha_A$, temos $F \subseteq U_A = U \cap A$, o que implica em $F \subseteq A$ e com isso $F = F \cap A$. Logo, B é g*-fechado em (A, α_A).

c.q.p.

Lema 5.2.12

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff onde α é a coleção dos conjuntos abertos e δ a coleção dos conjuntos fechados de (X, α). Se $\alpha \subseteq \delta$ ou $\delta \subseteq \alpha$, então $\alpha = \delta$.

Prova

Digamos que $\alpha \subseteq \delta$ onde δ é a coleção dos conjuntos fechados do espaço de Alexandroff (X, α). Assim, para verificarmos que $\alpha = \delta$, basta mostrarmos que $\delta \subseteq \alpha$. Seja $F \in \delta$, então $F^c \in \alpha$. Por hipotese temos que $F^c \in \delta$. Logo, $(F^c)^c \in \alpha$, i. e., $F \in \alpha$. A demonstração para $\delta \subseteq \alpha$ implica em $\alpha = \delta$ é analoga.

c.q.p.

Teorema 5.2.13 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α). Se todo subconjunto de X é g-fechado em (X, α), então $\alpha = \delta$.*

Prova

Digamos que todo subconjunto de X no espaço (X, α) é g*-fechado. Seja δ a coleção de todos os conjuntos fechados de (X, α). Dado $A \in \alpha$, temos, por hipotese, que A é g*-fechado. Pelo lema 5.2.10, A é fechado, i. e., $A \in \delta$, ou seja, $\alpha \subseteq \delta$. Com isso e pelo lema 5.2.12, temos que $\alpha = \delta$.

c.q.p.

A reciproca do teorema anterior nem sempre é verdadeira, como podemos verificar no seguinte exemplo:

Exemplo 5.2.14

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, G a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R}$ e H a coleção do complementar dos elementos de G, i. e., H é a coleção de todos os subconjuntos se X cujo complementar é enumerável. Seja $\alpha = \{X, \emptyset\} \cup G \cup H$. Temos então que $(\mathbb{R}, \alpha)$ é um espaço de Alexandroff, porém, não é um espaço topológico. Seja δ a coleção de todos os conjuntos fechados de $(\mathbb{R}, \alpha)$, então $\alpha = \delta$. Porém, o conjunto $(0, 1)$ não é fechado e ainda, sabendo-se *que $ker[(0,1)] = (0,1)$ temos que não existe um conjunto fechado F onde $(0,1) \subseteq F$ e $F \subseteq Ker[(0,1)]$. Assim, pelo teorema 5.2.5, $(0,1)$ não é g*-fechado.*

Teorema 5.2.15 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X,α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados de (X,α). Assim, se $\delta = \alpha$,então todo subconjunto de (X,α) é g-fechado se e somente se (X,α) é um espaço topológico*

Prova

Seja (X,α) um espaço de Alexandroff onde $\alpha = \delta$, sendo δ a coleção de todos os fechados de (X,α).

Necessidade: Digamos que todo subconjunto de X é g*-fechado em (X,α). Como (X,α) é de Alexandroff, temos que $\emptyset, X \in \alpha$ e a interseção finita de elementos de α pertence a α. Seja $A_i \in \alpha, i \in I$ onde I é não enumerável. Vamos mostar que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \alpha$. Seja $F_i = A^c{}_i$, assim, por hipotese, $\bigcap_{i\in I} F_i$ é g*-fechado, logo, existe $F \in \delta$ onde, para todo aberto U contendo $\bigcap_{i\in I} F_i$ temos que:

$$\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq F \subseteq U$$

De modo particular, como para todo $i \in I$,$\bigcap_{i\in I} F_i \subseteq F_i$, e $F_i \in \delta = \alpha$, temos que:

$$F \subseteq F_i$$

para todo $i \in I$, logo:

$$F \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i$$

dessa maneira, temos que

$$\bigcap_{i\in I} F_i = F$$

ou seja, $\bigcap_{i\in I} F_i$ é fechado. Assim, temos que $\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} F_i{}^c = \bigcup_{i\in I} A_i$ é aberto.
Como a família $\{A_i\}_{i\in I}$ é qualquer, temos que a união não enumerável de abertos é aberta, logo, (A,α) é um espaço topológico.

Suficiência: Digamos que (X, α) é um espaço topológico. Seja $A \subseteq X$. Mostraremos que A é g*-fechado. Seja $\beta = \{U \in \alpha | A \subseteq U\}$, então :

$$A \subseteq ker(A) = \bigcap_{U \in \beta} U$$

porém, como $U \in \alpha = \delta$, temos que:

$$Ker(A) = \bigcap\{U \in \alpha | A \subseteq U\} = \bigcap\{U \in \delta | A \subseteq U\} = \overline{A}$$

como (X, α) é um espaço topológico, temos que $\overline{A}$ é fechado, assim, tomando $F = \overline{A}$, temos que:

$$A \subseteq F \subseteq Ker(A)$$

Pelo teorema 5.2.5, temos que A é g*-fechado.

c.q.p.

Definição 5.2.16

Diremos que um conjunto $A \subseteq X$ é compacto no espaço de Alexandroff (X, α) se e somente se toda cobertura aberta de A possui uma subcobertura finita.

Ao contrário dos conjuntos g-fechados em um espaço topológico compacto, num espaço de Alexandroff compacto, conjuntos g*-fechados nem sempre são compactos, como podemos verifica no exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.17

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\alpha = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup G$, onde G é a coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R} - \{0\}$. O espaço $(\mathbb{R}, \alpha)$ é um espaço de Alexandroff, porém, não é topológico . Assim, $(\mathbb{R}, \alpha)$ é compacto, pois, toda cobertura aberta de $(\mathbb{R}, \alpha)$ deve conter $\mathbb{R}$. O intervalo $(1, 2)$ é g-fechado, uma vez que o único aberto que o contém é $\mathbb{R}$, porém, não é compacto.*

E ainda, pelo teorema 3.1.14, se (X, τ) é um espaço topológico regular, conjuntos compactos são g-fechados, porém, o análogo desse resultado para espaćos de Alexandroff regulares e conjuntos g*-fechados não é válido como mostraremos no exemplo a seguir:

Exemplo 5.2.18

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\alpha = \{\emptyset, X\} \cup G \cup H$, onde G é a coleção dos subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{R} - \{0\}$ e H é a coleção dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contém 0 e cujo complementar é finito. Assim $(\mathbb{R}, \alpha)$ é um espaço de Alexandroff porém, não topológico.

Vamos mostar que $(\mathbb{R}, \alpha)$ é regular. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $F \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto fechado em $(\mathbb{R}, \alpha)$ onde $a \notin F$. Se $a \neq 0$, basta tomarmos $\{a\} \in \alpha$ e $\{a\}^c \in \alpha$, assim, $a \in \{a\}, F \subseteq \{a\}^c$ e $\{a\} \cap \{a\}^c = \emptyset$. Caso $a = 0$, temos que F^c é um aberto que contém 0, logo, $F = (F^c)^c = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, onde $a_i \neq 0, i = 1, ..., n$. Assim, F é também aberto, logo, $0 = a \in F^c, F \subseteq F$ e $F^c \cap F = \emptyset$.

Mostraremos agora que existe um conjunto bicompacto em (R, α) que não é g-fechado. O intervalo $(-1, 1)$ é bicompacto em $(\mathbb{R}, \alpha)$. De fato, seja $L \subseteq \alpha$ uma cobertura de $(-1, 1)$. Como $0 \in (-1, 1)$, deve existir ao menos um elemento $A \in L$ que contém 0. Assim, A^c é finito, pois, $A \in H$. Se $(-1, 1) - A = \emptyset$, basta tomarmos $\{A\} \subseteq L$ como uma subcobertura finita de L. Caso contrário, sabemos que $(-1, 1) - A = (-1, 1) \cap A^c$ é ainda finito. Assim, para cada $x \in (-1, 1) - A$, deve existir $U_x \in L$ onde $x \in U_x$. Tomamos, dessa maneira, a subcobertura finita $S = \{A\} \cup \{U_x \in L | x \in (-1, 1) - A\} \subseteq L$.*

O conjunto $(-1, 1)$ não é fechado e também não é g-fechado, pois $Ker[(-1, 1)] \subseteq \bigcap\{\mathbb{R} - \{x\} | x \notin (-1, 1)\} = (-1, 1)$, vemos que não existe um conjunto fechado F onde $(-1, 1) \subseteq F \subseteq Ker[(-1, 1)]$. Pelo teorema 5.2.5, $(-1, 1)$ não é g*-fechado.*

Teorema 5.2.19 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Então , dado $x \in X$, temos que o conjunto $\{x\}$ é fechado ou $\{x\}^c$ é g-fechado.*

Prova

Seja $x \in X$. Digamos que $\{x\}$ não é fechado, então , $\{x\}^c$ não é aberto. Logo, o único conjunto aberto que contém $\{x\}^c$ é X. Assim, como X é fechado e $\{x\} \subseteq X$, temos que x^c é g*-fechado.

c.q.p.

5.3 Conjuntos g*-abertos

Definição 5.3.1 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Diremos que o conjunto $A \subseteq X$ é g-aberto se e somente se A^c é g*-fechado.*

Observação 5.3.2

Observe que se (X, α) um espaço de Alexandroff e $A \subseteq X$ e $\delta^A = \{F \subseteq X | F$ é $fechado$ e $F \subseteq A\}$ então $\delta^A = \{V^c \subseteq X | V \in \alpha$ e $A^c \subseteq V\}$

Teorema 5.3.3 *(Das e Rashid, [8])*

Um conjunto A é g-aberto em um espaço de Alexandroff (X, α) se e somente se existe um conjunto aberto U contido em A tal que para todo F fechado em $(X, \alpha), F \subseteq A$ implica em $F \subseteq U$.*

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados em (X, α).

Necessidade:Digamos que A é g*-aberto em (X, α). Logo, por definição, A^c é g*-fechado.

Assim, existe $G \in \delta, A^c \subseteq G$, onde, para todo $V \in \alpha, A^c \subseteq V$ implica em $G \subseteq V$, ou seja, para todo $V \in \alpha, V^c \subseteq A$ implica em $V^c \subseteq G^c$.

Seja $G^c = U \in \alpha$.

Pela observação 5.3.2, a afirmação acima equivale a dizer que existe $U \in \alpha, U \subseteq A$ onde, para todo $F \in \delta, F \subseteq A$ implica em $F \subseteq U$.

Suficiência: Digamos que $A \subseteq X$ é tal que existe $U \in \alpha, U \subseteq A$, onde, para todo $F \in \delta, F \subseteq A$ implica em $F \subseteq U$.

De maneira analoga à demonstração da necessidade e tomando $U^c = G \in \delta$, teremos que A^c é g*-fechado, ou seja, A é g*-aberto.

c.q.p.

5.4 Espaços T_w

Definição 5.4.1 *(Das e Rashid, [8])*

Um espaço de Alexandroff (X, α) é chamado de T_w se e somente se todo conjunto g-fechado é fechado.*

Podemos notar que essa definição é parecida com à dada por Levine em [17] para espaços topológicos $T_{1/2}$. Porém, para espaços topológicos, temos que:

$$T_1 \Longrightarrow T_{1/2} \Longrightarrow T_0$$

o que não irá ocorrer para espaços T_w.

Teorema 5.4.2 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff. Se (X, α) é T_w, então (X, α) é também T_0.

Prova

Sejam $x, y \in X$ onde $x \neq y$.

Se $\{x\}$ é fechado, temos que $\{x\}^c$ é um aberto que contém y mas não contém x. Caso $\{x\}$ não seja fechado, temos, pelo teorema 5.2.19 que $\{x\}^c$ é g*-fechado. Assim, como (X, α) é T_w, $\{x\}^c$ é fechado, o que implica que $\{x\} = (\{x\}^c)^c$ é aberto. Logo, sendo que $x \in \{x\}$ e $y \notin \{x\}$, temos que (X, α) é T_0.

c.q.p.

Porém, em espaços de Alexandroff, ser T_1 não implica que o espaço é T_w. Para isso, podemos obsevar o espaço (X, α), onde $\alpha = \{\emptyset, X\} \cup C$, onde C é a coleção de todso os subconjuntos finitos ou enumeráveis de X. Assim, (X, α) é T_1, logo, também é T_0, porém, como observamos no exemplo 5.2.2, (X, α) não é T_w.

Teorema 5.4.3

Se (X, τ) é um espaço topológico, então um conjunto $A \subseteq X$ é g-fechado se e somente se A é g-fechado, ou seja, num espaço topológico, as definições de conjuntos g*-fechados e de conjuntos g-fechados coincidem.*

Prova

Seja (X, τ) um espaço topológico.

Necessidade:Digamos que $A \subseteq X$ é um conjunto g*-fechado em (X, τ), então, existe um fechado F com $A \subseteq F$ onde, para todo $U \in \tau$ temos que $A \subseteq U$ implica em $F \subseteq U$.

Como $A \subseteq F$ e F é fechado, temos que $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$, assim, para todo $U \in \tau$ onde $A \subseteq U$, temos que $\overline{A} \subseteq F \subseteq U$. Logo, A é g-fechado.

Suficiência: Seja A um conjunto g-fechado em (X, τ), então, para todo $U \in \tau$, temos que $A \subseteq U$ implica em $\overline{A} \subseteq U$.

Como (X, τ) é topológico, temos que $\overline{A}$ é fechado. Assim, A é g*-fechado.

c.q.p.

Definição 5.4.4 *(Das e Rashid, [8])*

Seja (X, α) *um espaço de Alexandroff e* $A \subseteq X$*. Chamaremos de g*-fecho de A ao conjunto* $\overline{A}^* = \bigcap\{F \subseteq X | A \subseteq F \ e \ F \ é \ g*-fechado\}$.

Teorema 5.4.5 *(Das e Rashid, [8])*

O espaço de Alexandroff (X, α) *é* T_w *se e somente se:*

i. *Para cada* $x \in X$*,* $\{x\}$ *é aberto ou fechado;*

ii. $C = C^*$*, onde* $C = \{A \subseteq X | \overline{A^c} \ é \ fechado\}$ *e* $C^* = \{A \subseteq X | \left(\overline{A^c}\right)^* \ é \ g*-fechado\}$

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff.

Necessidade: Digamos que (X, α) é T_w. Seja $x \in X$, assim, pelo teorema 5.2.19, $\{x\}$ é fechado ou $\{x\}^c$ é g*-fechado.

Se $\{x\}$ não é fechado, temos então que $\{x\}^c$ é g*-fechado, logo, por hipotese, $\{x\}^c$ é fechado, ou seja, $\{x\}$ é aberto.

E ainda, seja $A \in C$, onde C é como descrito acima. Temos então que $\overline{A^c}$ é fechado, logo, g*-fechado. Com isso, $\overline{A^c} = \left(\overline{A^c}\right)^*$ e assim, $C \subseteq C^*$. De maneira analoga, podemos mostrar que $C^* \subseteq C$. Logo $C = C^*$

Suficiência: Digamos que (X, α) é tal que para todo $x \in X, \{x\}$ é aberto ou fechado e além disso $C = C^*$. Seja A um conjunto g*-fechado em (X, α). Dessa maneira, temos que $A = \overline{A}^*$, logo, $A^c \in C^*$. Por hipotese, temos que $A^c \in C$, assim, $\overline{A}$ é fechado.

Vamos mostar que $\overline{A} = A$.

Digamos, por absurdo, que $\overline{A} \neq A$. Como $A \subseteq \overline{A}$, existe $x \in \overline{A} - A$, logo, $\{x\} \subseteq \overline{A} - A$. Pelo corolário 5.2.4, $\{x\}$ não pode ser fechado. Assim, por hipotese, $\{x\}$ é aberto. Com isso, como $x \notin A$, temos que $\{x\} \subseteq A^c$, logo $A \subseteq \{x\}^c$. Sendo $\{x\}^c$ fechado, temos que $\overline{A} \subseteq \{x\}^c$ de onde temos que $\{x\} \subseteq \left(\overline{A}\right)^c$, i. e., $x \notin \overline{A}$.

Absurdo!!!, logo, $\overline{A} - A$.

c.q.p.

Teorema 5.4.6

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechado de (X, α). Então, dado $x \in X$, temos que $\{x\}$ será aberto ou fechado se e somente se para todo subconjunto $A \subseteq X$, temos que $A = \bigcap\{W_A \subseteq X | A \subseteq W_A$ e $W_A \in \alpha \cup \delta\}$.

Prova

Seja (X, α) um espaço de Alexandroff e δ a coleção de todos os fechados de (X, α).

Necessidade: Digamos que, para todo $x \in X, \{x\}$ é aberto ou fechado. Vamos definir $\rho^A = \{W_A \subseteq X \ | A \subseteq W_A \ e \ W_A \in \alpha \cup \delta\}$. Seja $x \in X$ onde $x \notin A$, logo $A \subseteq \{x\}^c$. Por hipotese temos que $\{x\}^c$ é aberto ou fechado. E temos ainda que:

$$A = \bigcap\{\{x\}^c \subseteq X | x \notin A\}$$

Assim:

$$A \subseteq \rho^A \subseteq \bigcap\{\{x\}^c \subseteq X | x \notin A\} = A$$

Suficiência: Digamos agora que para todo $A \subseteq X$, temos que:

$$A = \{W_A \subseteq X | A \subseteq W_A \ e \ W_A \in \alpha \cup \delta\}$$

Digamos, por absurdo, que $\{x\}$ não é aberto nem fechado, assim, $\{x\}^c$ também não será. Logo, o único elemento de $\alpha \cup \delta$ que contém $\{x\}^c$ é X. Por hipotese, temos que $\{x\}^c = X$. Absurdo!!! Logo, $\{x\}$ é aberto ou fechado.

c.q.p.

Dos teoremas 5.4.5 e 5.4.6, temos que:

Teorema 5.4.7 *(Das e Rashid, [8])*

O espaço de Alexandroff (X, α) *é* T_w *se e somente se:*

i. todo subconjunto de X *é a interseção de todos os abertos e fechados que o contém;*

ii. $C = C^*$, *onde* $C = \{A \subseteq X | \overline{A^c} \text{ é } fechado\}$

$e\ C^* = \{A \subseteq X | \left(\overline{A^c}\right)^* \text{ é } g* -fechado\}$

Definição 5.4.8 *(Das e Rashid, [8])*

Diremos que o espaço de Alexandroff (X, α) *é um espaço porta se e somente se todo subconjunto de* X *é ou aberto ou fechado.*

Teorema 5.4.9 *(Das e Rashid, [8])*

Se (X, α) *é um espaço porta, então* (X, α) *é* T_w*.*

Prova

Seja (X, α) um espaço porta. Digamos, por absurdo, que existe $A \subseteq X$ que é g*-fechado porém não é fechado. Assim, por hipotese, temos que A é aberto.

Como A é g*-fechado, temos que existe F fechado em (X, α) com $A \subseteq F$, onde, para todo aberto U contendo A, temos que $F \subseteq U$.

Sabendo-se que $A \subseteq A$, temos que $A \subseteq F \subseteq A$ de onde temos que $A = F$, ou seja, A é fechado. Absurdo!!!

Logo (X, α) é T_w

c.q.p.

Capítulo 6

Espaços L-Alexandroff e conjuntos g*-fechados

Neste último capítulo apresentamos a definição de espaços de Alexandroff para matemática fuzzy, que denominaremos de espaços L-Alexandroff e além disso, sugerimos uma definição para conjuntos g*-fechados.

O capítulo divide-se em três seções.

A primeira seção contém algumas definições (entre elas a de espaço de L-Alexandroff) e teoremas. Na segunda seção a definição de conjuntos g*-fechados em um espaço de L-Alexandroff e alguns resultados. Por fim, na última seção a nossa definição de conjuntos g*-abertos em um espaço de L-Alexandroff.

6.1 Espaços L-Alexandroff

Definição 6.1.1

Dados um conjunto X e um reticulado L, chamaremos de espaço de Alexandroff L-fuzzy ao par (X, Γ), onde Γ uma função $\Gamma : L^X \to L$ onde:

i. $\Gamma(1) = \Gamma(0) = 1$;

ii. $\Gamma(u \wedge v) \geq \Gamma(u) \wedge \Gamma(v), \forall u, v \in L^X$;

iii. *Se J é um conjunto enumerável então:* $\Gamma\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \geq \bigwedge_{j \in J} \Gamma(f_i), \forall i \in J, f_i \in L^X$.

Definição 6.1.2

Seja X um conjunto qualquer, L um reticulado fuzzy e β um subconjunto de L^X. Diremos que o para (X, β) é um espaço de L-Alexandroff se e somente se:

i. $0, 1 \in \beta$*;*

ii. Dados f e $g \in \beta$, temos que $f \wedge g \in \beta$.

ii. Dada uma família $\{f_i\}_{i \in J}$ de elementos de β, onde J é enumerável, temos que $\left(\bigvee_{i \in J} f_i\right) \in \beta$*;*

Os elementos f de β serão chamados de abertos e f' de fechados.

É fácil ver que todo espaço L-topológico é um espaço L-Alexandroff, porém, a reciproca nem sempre é verdadeira.

Exemplo 6.1.3

Vamos considerar o reticulado $(L, \leq, ', \vee, \wedge)$ onde

- $L = \{\chi_A | A \subseteq [0;1]\}$*;*

- $\chi_A \leq \chi_B \iff A \subseteq B$*;*

- $\chi'_A = \chi_{A^c}$.

Para não haver perigo de confusão, vamos definir $0_L = \chi_\emptyset$ e $1_L = \chi_{[0;1]}$

Seja $X = \wp([0;1])$ onde $\wp([0;1])$ é a coleção das partes de $[0;1]$.

Definimos ainda:

- $0_\chi(A) = 0_L$

- $1_\chi(A) = 1_L$

Para todo $A \in X$

Vamos considerar $F = \{f_A \mid A \subseteq [0;1]$ é enumeravel$\}$ onde cada $f_A : \wp([0;1]) \to L$ é definida como $f_A(B) = \chi_{B \cup A}$. Sendo $\beta = \{0_\chi, 1_\chi\} \cup F$ temos que (X, β) é um espaço L-Alexandroff porém não é L-topológico. De fato:

i. 0_χ *e* $1_\chi \in \beta$;

ii. Dados g *e* $h \in \beta$, *temos que* $g \wedge h \in \beta$.

Digamos que g *e* h *são elementos de* F, *assim, existem* A_1 *e* $A_2 \in \wp(X)$ *onde* $g = f_{A_1}$ *e* $h = f_{A_2}$. *Sabendo-se que* $\bigwedge\limits_{i\in J} \chi_{A_i} = \chi_{\left(\bigcap\limits_{i\in J} A_i\right)}$ *e* $\bigcap\limits_{i\in J} A_i$ *é enumerável, temos:*

$(g \wedge h)(B) = g(B) \wedge h(B) = f_{A_1}(B) \wedge f_{A_2}(B) = \chi_{B\cup A_1} \wedge \chi_{B\cup A_2} = \chi_{(B\cup A_1)\cap(B\cup A_2)} =$

$$\chi_{B\cup(A_1\cap A_2)} = f_{A_1\cap A_2}(B\}$$

É fácil verificar que $g \bigwedge h \in \beta$ *se* $g, h = 0_\chi$ *e / ou* $g, h = 1_\chi$.

iii. Se $\{f_i\}_{i\in J}$ *são elementos de* β, *onde* J *é enumerável, então* $\left(\bigvee\limits_{i\in J} f_i\right) \in \beta$. *Pois dado* $B \in X$, *digamos que* $\{f_i\}_{i\in J}$ *são elementos de* F, *assim, existem* $\{A_i\}_{i\in J}$ *onde* $f_i = f_{A_i}$. *Sabendo-se que* $\bigvee\limits_{i\in J} \chi_{A_i} = \chi_{\left(\bigcup\limits_{i\in J} A_i\right)}$ *e* $\bigcup\limits_{i\in J} A_i$ *é enumerável, temos:*

$$\left(\bigvee_{i\in J} f_{A_i}\right)(B) = \left(\bigvee_{i\in J} f_{A_i}(B)\right) = \left(\bigvee_{i\in J} \chi_{B\cup A_i}\right) = \chi_{B\cup\left(\bigcup\limits_{i\in J} A_i\right)} = f_{\left(\bigcup\limits_{i\in J} A_i\right)}(B)$$

É fácil verificar que $\left(\bigvee\limits_{i\in J} f_i\right) \in \beta$ *se há elementos* $f_k = 0_\chi$ *ou* $f_k = 1_\chi$.

Não podemos, entretanto, afirmar que $\left(\bigvee\limits_{i\in J} f_{A_i}\right)$ *pertence a* β *quando* J *é um conjunto arbitrário, pois, se* J *é não-enumerável, é possível que* $\bigcup\limits_{i\in J} A_i$ *seja também não- enumerável e assim:*

$$\left(\bigvee_{i\in J} f_{A_i}\right)(B) = \chi_{B\cup\left(\bigcup\limits_{i\in J} A_i\right)}$$

Se $\bigcup\limits_{i\in J} A_i$ *é um conjunto não-enumerável, não podemos dizer que:*

$$\chi_{B\cup\left(\bigcup\limits_{i\in J} A_i\right)} = f_{\left(\bigcup\limits_{i\in J} A_i\right)}(B)$$

Definição 6.1.4

Seja (X, β) *um espaço de L-Alexandroff e* $b \in L^X$. *Chamaremos de fecho de* b *ao L-conjunto* $\overline{b}$ *definido como:*

$$\overline{b} = \bigwedge\{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } b \leq f\}$$

onde γ é a coleção dos conjuntos fechados do espaço (X, β).

Convém observar que nem sempre, em um espaço L-Alexandroff, o fecho de um L-conjunto é fechado, uma vez que a interseção arbitrária de fechados pode não ser fechado, porém:

Teorema 6.1.5

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff e $a \in L^X$. Então $a \leq \overline{a}$.

Prova

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff,γ a coleção de todos os fechados de (X, β), $a \in L^X$ e $A_a = \{b \in L^X | a \leq b\}$. É fácil ver que $\{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } a \leq f\} \subseteq A_a$. Assim , para todo $x \in A_a$, temos que $a \leq x$, i. e., a é uma cota inferior de A_a. Com isso:

$$a \leq \bigwedge A_a \leq \bigwedge \{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } a \leq f\} = \overline{a}$$

c.q.p.

Teorema 6.1.6

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff. Se f é fechado em (X, β) então $f = \overline{f}$.

Prova

De fato, seja (X, β) um espaço L-Alexandroff e f um fechado de (X, β). Sabemos, pelo teorema anterior, que $f \leq \overline{f}$. Como f é um fechado onde $f \leq f$, temos que $\overline{f} = \bigwedge \{f \in L^X | f \in \gamma \text{ e } b \leq f\} \leq f$, assim, $f = \overline{f}$.

c.q.p.

Definição 6.1.7

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff e $a \in L^X$. Chamaremos de interior de a ao L-conjunto a° definido como:

$$a^{\circ} = \bigvee\{u \in L^X | u \in \beta \ e \ u \leq a\}$$

Como no fecho, observamos que nem sempre o interior de um L-conjunto é aberto em espaços L-Alexandroff.

Observação 6.1.8

Num espaço L-Alexandroff (X, β), seja γ a coleção dos conjuntos fechados de (X, β) e $a \in L^X$, temos então que:

$$\{f' \in L^X | f \in \gamma \ e \ a \leq f\} = \{b \in L^X | b \in \beta \ e \ b \leq a'\}$$

$$e$$

$$\{b' \in L^X | b \in \beta \ e \ b \leq a\} = \{f \in L^X | f \in \gamma \ e \ a' \leq f\}$$

Teorema 6.1.9

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff e $a \in L^X$. Assim:

$$(\overline{a})' = (a')^{\circ} \ e \ (a^{\circ})' = \overline{(a')}$$

Prova

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff, γ a coleção dos L-conjuntos fechados de (X, β) e $a \in L^X$. Então, pelo teorema 2.2.5 e pela observação 6.1.8:

$$\begin{aligned}(\overline{a})' &= \left(\bigwedge\{f \in L^X | f \in \gamma \ e \ a \leq f\}\right)' \\ &= \bigvee\{f' \in L^X | f \in \gamma \ e \ a \leq f\} \\ &= \bigvee\{b \in L^X | b \in \beta \ e \ b \leq a'\} = (a')^{\circ}\end{aligned}$$

De maneira analoga podemos provar também que $(a^{\circ})' = \overline{(a')}$

c.q.p.

6.2 Conjuntos g*-fechados em espaços L-Alexandroff

Definição 6.2.1

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff. Diremos que o L-conjunto $b \in L^X$ é g-fechado se e somente se existe $f \in L^X$ fechado com $b \leq f$, onde, para todo $a \in \beta$ e para todo $p \in Pr(L)$ onde:*

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

temos que

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

Ou seja, existe f fechado com $b \leq f$ onde para todo $a \in \beta$:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin b' \Longrightarrow x_p \in a)$$

implica em

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in a)$$

Teorema 6.2.2

Todo L-conjunto fechado num espaço L-Alexandroff (X, β) é g-fechado.*

Prova

De fato, seja (X, β) um espaço L-Alexandroff, $f \in L^X$ um fechado em (X, β) e $a \in \beta$ de forma que para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

Sabendo-se que $f \leq f$ e que a afimação acima implica em:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

Para todo $p \in Pr(L)$, conluimos que f é g*-fechado.

c.q.p.

Nem todo conjunto g*-fechado num espaço L-Alexandroff é fechado.

Exemplo 6.2.3

Seja $L = \{\chi_A \mid A \subseteq [0;1]\}$*;* $X = \wp([0;1])$*.*

Dados $A, B \subseteq [0;1]$*, definimos:*

- $\chi_A \leq \chi_B \iff A \subseteq B$*;*
- $\chi'_A = \chi_{A^c}$*.*

Vamos considerar o espaço L-Alexandroff (X, β) *onde* $\beta = \{0_\chi; 1_\chi\} \cup F$ *sendo* $F = \{f_A \mid A \subseteq [0;1]$ *é enumerável* $\}$

onde $f_A(B) = \chi_{A \cup B}$

O L-conjunto $h \in L^X$ *definido para todo* $B \in X$ *como:*

$$h(B) = \chi_{\{0,5\}^c}$$

Não é fechado em (X, β)*, porém, é g*-fechado.*

De fato, sejam $p \in Pr(L)$ *e* $a \in \beta$ *onde:*

$$(\forall B \in X)(h(B) \geq p' \Longrightarrow a(B) \nleq p) \text{ (1)}$$

Vamos mostrar que o único L-aberto que satisfaz a condição acima é $a = 1_\chi$*.*

Obviamente, $a \neq 0_\chi$*. Assim, digamos, por absurdo, que existe* $f_A \in F$ *onde, para todo* $p \in Pr(L)$*:*

$$(\forall B \in X)(h(B) \geq p' \Longrightarrow f_A(B) \nleq p)$$

A hipotese $h(B) \geq p'$ *é verdadeira para todo* $p = \chi_{\{k\}^c}$*, onde* $k \neq 0,5$ *e para todo* $B \in X$*, de modo particular, temos que* $h(\emptyset) \geq p'$ *. Com isso, conclui-se, por (1), que:*

$$\chi_{A \cup \emptyset} = f_A(\emptyset) \nleq p = \chi_{\{k\}^c}$$

ou seja

$$A \cup \emptyset = A \nsubseteq \{k\}^c$$

Para todo $k \in [0;1]$*.*

Os únicos elementos que atendem as condições acima para A são $[0;1]-\{0,5\}$ *ou* $[0;1]$*, ambos não-enumeráveis. Absurdo!!! Logo, o único elemento L-aberto que satisfaz (1) é* $a = 1_\chi$.

Além disso, o único L-conjuto fechado que que contém h é 1_χ.

Sabendo-se que:

$$(\forall B \in X)(1_\chi(B) \geq p' \Longrightarrow 1_\chi(B) \nleq p)$$

Temos, para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall B \in X)(\overline{a}(B) \geq p' \Longrightarrow a(B) \nleq p)$$

Logo, h é um L-conjunto g-fechado, porém, não é fechado.*

Definição 6.2.4

Seja $a \in L^X$ *e* $p \in Pr(L)$ *no espaço L-Alexandroff* (X,β)*. Definimos:*

$$G_{a,p} = \{u \in \beta | (\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p\}$$

e

$$G_a = \bigcap_{p \in Pr(L)} G_{a,p}$$

Teorema 6.2.5

Seja (X,β) *um espaço L-Alexandroff,* $a \in L^X$ *e* $h = \bigwedge\limits_{u \in G_a} u$*. Se existe f fechado em* (X,β) *onde para todo* $p \in Pr(L)$ *temos que:*

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in f' \Longrightarrow x_p \in h)$$

então $a \in L^X$ *é g*-fechado em* (X,β).

Prova

Seja $u \in \beta$ onde,

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \in f' \Longrightarrow x_p \in h)$$

i. e., para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

logo $u \in G_a$. Assim, $h \leq u$, com isso:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow h(x) \nleq p \Longrightarrow u(x) \leq p)$$

Como $u \in G_a$ é qualquer, temos que para todo $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$ onde:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

implica em:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

ou seja, $a \in L^X$ é g*-fechado.

c.q.p.

Teorema 6.2.6

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff. Se $a, b \in X$ são g-fechados em (X, β) então $a \vee b$ é também g*-fechado.*

Prova

Seja $a, b \in L^X$ conjuntos g*-fechados em (X, β). Seja $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$ onde:

$$(\forall x \in X)((a \vee b)(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Mostraremos que existe f fechado, com $a \vee b \leq f$ e

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Como $a, b \in L^X$ são g*-fechados, temos que existe $f_a, f_b \in L^X$ fechados com $a \leq f_a$ e $b \leq f_b$ onde, para todo $v \in \beta$ e $p \in Pr(L)$, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f_a(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \nleq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f_b(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \nleq p)$$

Como $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$, temos que:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow (a \vee b)(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Assim, temos que

$$(\forall x \in X)(f_a(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(f_b(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

logo:

$$(\forall x \in X)(f_a(x) \geq p' \text{ ou } f_b(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Por p' ser coprimo, a afirmação acima equivale a:

$$(\forall x \in X)((f_a \vee f_b)(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Tomando $f = f_a \vee f_b$ temos que f atende a propriedade que queriamos ($f \leq a \vee b$).

Como $p \in Pr(L)$ é qualquer, a afirmação acima vale para todo $p \in Pr(L)$.

c.q.p.

Teorema 6.2.7

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff e $a, b \in L^X$ onde a é g-fechado. Se b é tal que $a \leq b \leq \overline{a}$, então b é g*-fechado.*

Prova

Seja (X, β) um espaço de L-Alexandroff e $a, b \in L^X$ onde a é g*-fechado com $a \leq b \leq \overline{a}$.

Como a é g*-fechado, existe f fechado com $a \leq f$ para todo $p \in Pr(L)$ e $u \in \beta$ temos que:

$$\left.\begin{array}{c}(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)\\ \textit{implica em}\\ (\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)\end{array}\right\}(1)$$

Seja $p \in Pr(L)$ e $u \in \beta$ de forma que:

$$(x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Assim, como $a \leq b$, temos que a afirmação acima implica em:

$$(\forall x \in X)(a(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Logo, por (1), temos que:

$$(\forall x \in X)(b(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

e como f é fechado em (X, β) e $a \leq f$ temos que $a \leq b \leq \overline{a} \leq f$, i. e., $b \leq f$.

Como $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$ são quaisquer, temos que b é g*-fechado.

c.q.p.

6.3 Conjuntos g*-abertos em espaços L-Alexandroff

Definição 6.3.1

Seja (X, β) um espaço de L-Alexandroff. Diremos que o L-conjunto $a \in L$ é g-aberto se e somente se a' é g*-fechado.*

Teorema 6.3.2

Seja (X, β) um espaço de L-Alexandroff. O L-conjunto $a \in L^X$ é g-aberto se e somente se existe $u \in \beta$ com $u \leq a$ onde para todo L-fechado f e $p \in Pr(L)$, temos que:*

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

Que pode ser reescrito como:

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in a)$$

implica em

$$(\forall x_p \in Pr(L^X))(x_p \notin f' \Longrightarrow x_p \in u)$$

Prova

Seja (X, β) um espaço de L-Alexandroff.

Necessidade: Seja $a \in L^X$ um conjunto g*-aberto em (X, β). Assim, existe h fechado, com $a' \leq h$, onde para todo $u \in \beta$ e $p \in Pr(L)$:

$$\left.\begin{array}{c} (\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p) \\ \textit{implica em} \\ (\forall x \in X)(h(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p) \end{array}\right\} (1)$$

Assim, temos que:

$$(\forall x \in X)(a'(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall x \in X)(u(x) \leq p \Longrightarrow a'(x) \ngeq p')$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \ngeq p)$$

e

$$(\forall x \in X)(h(x) \geq p' \Longrightarrow u(x) \nleq p)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall x \in X)(u(x) \leq p \Longrightarrow h(x) \ngeq p')$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \Longrightarrow h'(x) \nleq p)$$

logo, a afirmação (1) equivale a

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(u'(x) \geq p' \Longrightarrow h'(x) \nleq p)$$

Afirmar que existe um fechado h onde $a' \leq h$, equivale a afirmar que existe v aberto onde $v \leq a$, para isso, basta tomarmos $v = h'$. E ainda, como $\{f \in L^X | f$ é fechado $\} = \{c' \in L^X | c$ é aberto $\}$ temos que, para todo f fechado e para todo $p \in Pr(L)$:

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow a(x) \nleq p)$$

implica em

$$(\forall x \in X)(f(x) \geq p' \Longrightarrow v(x) \nleq p)$$

Suficiência: A demonstração é de maneira analoga à suficiência, uma vez que a maior parte dos resultados na demonstração da necessidade são equivalencias. Para encontrarmos um fechado h com as características de g*-fechado, basta tomarmos $h = u'$.

c.q.p.

Teorema 6.3.3

Seja (X, β) um espaço L-Alexandroff e $a, b \in L^X$. Se a é g-aberto e $a^\circ \leq b \leq a$, então b é g*-aberto.*

Prova

Por definição, se a é g*-aberto, então a' é g*-fechado e ainda, $a^\circ \leq b \leq a$ equivale a:

$$a' \leq b' \leq (a^\circ)'$$

ou seja, pelo teorema 6.1.9:

$$a' \leq b' \leq \overline{a'}$$

Assim, pelo teorema 6.2.7, temos que b' é g*-fechado, logo, $(b')' = b$ é g*-aberto.

c.q.p.

Capítulo 7

Considerações finais

Com a definição dada neste trabalho para L-conjuntos g-fechados em espaços L-topológicos , conseguimos um dos nossos objetivos pricipais: encontrar uma coleção de L-conjuntos que generaliza-se os L-conjuntos fechados em um espaço L-topológico. Porém, alguns resultados envolvendo L-conjuntos g-fechados e axiomas de separação não foram confirmados. Por exemplo, em [17], Levine mostra que "Se (X, τ) é um expaço topológico regular e se A é compacto em (X, τ), então A é g-fechado", entretanto, não conseguimos mostrar que:

"Se $(X, \Im)$ é um espaço L-topológico regular e se a é compacto em $(X, \Im)$, então a é g-fechado."

Como não encontramos um contra-exemplo, não podemos afirmar se o resultado acima é verdadeiro ou falso.

O teorema 4.1.20 é demonstrado com a hipotese de L ser um conjunto totalmente ordenado, porém, nada sabemos se esse resultado pode ser verificado quando L for um reticulado fuzzy qualquer.

Um probelma em aberto no nosso trabalho é verificar o que ocorrerá em espaços L-topológicos onde os conjuntos g-fechados são fechados. Em [17], para topologia clássica, Levine verifica que espaços dessa maneira tem a característica de serem mais fracos que espaços T_1 e mais fortes que espaços T_0.

Para espaços de Alexandroff, Das e Rashid em [8], tentaram encontrar uma versão de conjuntos g-fechados para esses, definido assim os conjuntos g*-fechados. Na nossa versão L-fuzzy de espaços de Alexandroff, que denominamos "espaços L-Alexandroff", a definição de L-conjuntos g*-fechados para este comportou-se de maneira razoavel. Apesar de generalizar os L-conjuntos fechados, na nossa definção de L-conjuntos g*-fechados não obtivemos alguns resultados significativamente importantes.

Como foi dito anteriormente, Levine em [17], com a ajuda dos conjuntos g-fechados, encontrou um axioma de separação que está entre T_1 e T_0 em espaços topológicos, o que não foi possível com a definção de g*-fechado em espaços de Alexandroff. Sugerimos, como continuação deste trabalho, tentar encontrar um axioma de separação entre T_1 e T_0 em um espaço de Alexandroff que não depende da definição de conjunto g*-fechado, e com isso, encontrar uma versão desse para espaços L-Alexandroff.

Referências Bibliográficas

[1] A. D. Alexandroff, ”*Additive set functions in abstrat spaces*”, Mat. Sb. (N.S.) 8(50) (1940), 307-348 (English, Russian summary).

[2] K. K. Azad, *“On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy wearkly continuity*”, J. Math. Anal and Appl 82 (1981) 14-32.

[3] G. Birkhoff, ” *“Lattice theory*”, Amer. Mat. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, Providence, R.I., (1984).

[4] T. S. Blyth e M. F. Janowitz, ”*Residuation Theory*”, Pegamon Press, Oxford, 1972.

[5] T. K. Breuckmann ”*Alguns tópicos em L espaços topológicos: compacidade local, espaços de Hurewicz e proriedade* ω^*”, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, (2004).

[6] B.Balasubramanian e P. Sundaram ”*On some generalizations of fuzzy continuous functions*”, Fuzzy Sets and Systems 86, (1997) 93-100.

[7] C. L. Chang, *“Fuzzy topological spaces*”, J. Math. Anal. Appl. 24, (1968) 182-190.

[8] P. Das e M. A. Rashid, ”*Certain separation axioms in a space*”, Korean J. Math. Sciences, 7(2000), 81-93.

[9] P. Das e M. A. Rashid, ”*g*-closed sets and a new separation axiom in Alexandroff spaces*”, Archivum Mathematicum (BRNO). T. 39, (2003), 299-307.

[10] J. Fang *“Sums of L-fuzzy topological spaces*”, Fuzzy sets and systems 157, (2005) 739-754.

[11] S. A. Gaal, ”*Point set topology*”, Academic Press New York and London (1964).

[12] T.E. Gantner, R.C. Steinlage and R.H. Warren, ” *Compactness in fuzzy topological spaces*”, J. Math. Anal. Appl. 62, (1978) 547-562.

[13] G. Gierz at al., *“A compendium of continuous lattices*”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1986).

[14] J. A. Goguen, *“L-fuzzy sets*”, J. Math. Anal. Appl. 18, (1973) 145-174.

[15] B. Hutton *“Products of fuzzy topological spaces*”, Topology and it’s Applications 11, (1980) 59-67.

[16] B. K. Lahiri and P. Das, ”*Semi open sets in a space*”, Sains Malaysiana, 24(4) (1995), 1-11.

[17] N. Levine, *"Generalized closed sets in topology"*, Rend. Circ. Mat. Palermo 19(2) (1970), 89-96.

[18] S.R.T. Kudri. *"Compactness in L-fuzzy topological spaces"*, Fuzzy sets and systems 67, (1994) 329-446.

[19] S.R.T. Kudri, *"L- fuzzy compactness and related concepts"*, Ph.D. Thesis, City University, London, (1995)

[20] J. Munkres, *"Topology: A First Course"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1999)

[21] P.M. Piu, Y.M. Liu, *"Fuzzy topology I, neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence"*, J.Math.Anal.Appl. 76, (1980) 571-599.

[22] P.M. Piu, Y.M. Liu, *"Fuzzy topology II, product and quotient spaces"*, J.Math.Anal.Appl. 77, (1980) 20-37.

[23] A. Sostak. *On a fuzzy topological structures* Supp. Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. II) 11 (1985) 89-103

[24] M. W. Warner, *"Fuzzy topology with respect to continuous lattice"*, Fuzzy Sets and Systems 35, (1990) 85-91.

[25] M. W. Warner, *"Frame-fuzzy points and membership"*, Fuzzy Sets and Systems 42, (1991) 335-344.

[26] M. W. Warner and R. G. McLean, *"On compact hausdorff L-fuzzy spaces"*, Fuzzy Sets and Systems 56, (1993) 103-110.

[27] M. W. Warner and R. G. McLean, *"Locale theory and fuzzy topology"*, Fuzzy Sets and Systems 54, (1993) 91-97.

[28] M. D. Weiss, *"Fixed points, separation and induced topologies for fuzzy sets "*, J. math. Anal. Appl. 50, (1975) 142-150.

[29] C. K. Wong, *"Fuzzy points and local properties of fuzzy topology"*, J. Math. Anal. Appl. 46, (1974) 316-328.

[30] L.A. Zadeh, *"Fuzzy sets"* Inform. Contr. 8 (1965) 338-353